

## ОДУ-2023. Домашнее задание №5

Выдано 15.11.2023

Срок сдачи до **24:00 26.11.2023**

*Аккуратно записанную и оформленную в виде единого pdf-файла работу надо послать на адрес закрепленного за Вами учебного ассистента. Распределение студентов по учебным ассистентам см. вверху на странице курса.*

---

Для следующих  $A, b$  найдите матрицу  $e^{At}$  и решите задачу Коши  $\dot{x} = Ax, x(0) = b$ .

**Задача 5.1.**  $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

**Задача 5.2.**  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

**Задача 5.3.** Грузик массы  $m = 1$  скользит по горизонтальному стержню, при этом он прикреплён пружиной жёсткости  $k = 1$  к некоторой точке на стержне, а трение между стержнем и грузиком — вязкое, то есть сила трения равна  $-\alpha v$ . Если  $x$  — координата вдоль стержня,  $x = 0$  отвечает положению равновесия,  $v = \dot{x}$  — скорость грузика, то динамика этой системы описывается уравнениями

$$\dot{x} = v, \quad \dot{v} = -x - \alpha v.$$

(а) Для каждого  $\alpha > 0$  найдите вид особой точки этой системы и нарисуйте эскиз фазового портрета.

(б) Грузик запускают в момент времени  $t = 0$  с начальными условиями  $x(0) = x_0, v(0) = v_0$ . Опишите (для каждого  $\alpha > 0$ ) множества точек на плоскости  $(x_0, v_0)$ , стартуя из которых в ходе дальнейшего движения (т.е. при  $t > 0$ ) грузик пройдёт через положение равновесия (т.е.  $x = 0$ ) бесконечно много раз; один раз; ни разу.

Найдите общее решение неоднородной линейной системы:

**Задача 5.4.**  $\dot{x} = 4x - 6y, \dot{y} = 3x - 5y + t$ .

**Задача 5.5.**  $\dot{x} = 4x - 6y, \dot{y} = 3x - 5y + e^t$ .

**Задача 5.6.**  $\dot{x} = y + z + t, \dot{y} = x + z + 2t, \dot{z} = x + y + 3t$ .