Геометрическое введение в алгебраическую геометрию. Осень 2023г

Решения этих задач будут обсуждаться на следующем занятии. Внятно записанные (а лучше затеханные) решения можно присылать на почту alggem23@gmail.com, желательно до 24:00 субботы перед следующим занятием.

Задания с 7 занятия.

ВНИМАНИЕ! Поскольку задач стало больше, просьба присылать на проверку **не более трех задач** из этого списка, выбирая те решенные задачи, которые показались самыми значимыми и интересными. Мы на занятии в любом случае постараемся разобрать все, за исключением, наверное, третьей: подход к ее решению мы уже проговорили на занятии, ответ можно посмотреть в любом справочнике, а суметь пройти намеченным маршрутом до знаменитого нетривиального ответа — это внутренний вызов для каждого....

(1) Продолжение задачи 3 о норм-кубике с прошлого занятия (продолжающей задачу 5 с позапрошлого). Мы обсуждали отображение Веронезе $v_{1,3} : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^3$ и выяснили, что двойственное проективное пространство $\check{\mathbb{P}}^3$ есть проективизация пространства кубических многочленов от одной переменной (т.е. кубических форм на $\mathbb{P}^1$) и подмножество X кубов линейных форм $(a_0t_0 + a_1t_1)^3$ является в этом пространстве также норм-кубикой (с точностью до проективного преобразования). В этом же $\check{\mathbb{P}}^3$ содержится поверхность Δ, точки которой отвечают кубическим многочленам с кратным корнем, она задается обращением в нуль дискриминанта кубического многочлена. Докажите, что поверхность Δ есть объединение касательных прямых к норм-кубике.

(2) Не вычисляя дискриминанта кубического многочлена найдите из геометрических соображений степень поверхности Δ из предыдущей задачи, рассмотрев проекцию $p_l : X \to m$ норм-кубики X из

прямой l на прямую m (выбрав l и m не пересекающимися и не имеющими общих точек с X). Докажите, что эта проекция является регулярным отображением $\mathbb{P}^1$ в $\mathbb{P}^1$ (напомним, что X изоморфна $\mathbb{P}^1$), задаваемым кубическими формами, и что l можно выбрать так, чтобы у каждой точки прямой m было не менее двух прообразов, и что в этом случае степень поверхности Δ равна числу точек прямой m, имеющих ровно два прообраза.

(3) (Продолжение предыдущей задачи.) Выведите формулу Кардано для корней кубического многочлена из доказанного нами факта, что любая точка в $\check{\mathbb{P}}^3$, не лежащая на Δ, лежит ровно на одной хорде кривой X.(Все обозначения из предыдущей задачи.)

(4) Пусть регулярное отображение $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ задается формами степени d, не имеющими общих множителей. (Т.е. в однородных координатах $f(t_0 : t_1) = (F(t_0, t_1) : G(t_0, t_1))$, где F и G однородные формы степени d, не имеющие общих множителей.) Предположим, что у каждой точки не менее $d-1$ прообраза. У скольких точек ровно $d-1$ прообраз?

(5) Докажите, что если X и Y неприводимые топологические пространства, то $X \times Y$ (наделенное топологией произведения) также неприводимо.

(6) Покажите, что образ отображения Сегре $s_{m,n} : \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^{mn+m+n}$ совпадает с множеством решений в $\mathbb{P}^{mn+m+n}$ системы уравнений $u_{i,j}u_{p,q} = u_{i,q}u_{p,j}$, где $u_{i,j}$ $(i = 0, 1, \ldots, m,\ j = 0, 1, \ldots, n)$ — однородные координаты в $\mathbb{P}^{mn+m+n}$.

(7) Найдите степень $s_{1,2}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2) \subset \mathbb{P}^5$ (т.е. число точек пересечения $s_{1,2}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2)$ с общей плоскостью $\mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^5$).