Семинар 9.

Задача 1. Рассмотрим треугольник ABC, описанный около невырожденной коники $\mathcal{C}$, и пусть $A_1,\ B_1,\ C_1$ - точки касания с $\mathcal{C}$ прямых $BC,\ AC,\ AB$ соответственно. Докажите, что прямые $AA_1,\ BB_1,\ CC_1$ пересекаются в одной точке.

Задача 2. Рассмотрим треугольник ABC, вписанный в невырожденную конику $\mathcal{C}$, и пусть $\mathcal{D}$ - коника, вписанная в треугольник ABC. Через произвольную точку A_1 на конике $\mathcal{C}$ проведем две касательные к конике $\mathcal{D}$, и пусть они пересекают $\mathcal{C}$ в точках B_1 и C_1 соответственно. Докажите, что прямая B_1C_1 касается коники $\mathcal{D}$.
Указание: Пусть $P = A_1B_1 \cap BC,\ P_1 = AB \cap B_1C_1,\ Q = A_1C_1 \cap BC,\ Q_1 = AC \cap B_1C_1$. Проверьте, что соответствие $f:\ BC \to B_1C_1$ такое, что $f(B) = P_1,\ f(P) = B_1,\ f(C) = Q_1,\ f(Q) = C_1$, является проективным.

Вещественную евклидову плоскость $\mathbf{R}^2$ с координатами (x, y) дополним бесконечно удаленной прямой $\mathbb{P}^1_\infty$ с уравнением $x_0 = 0$ до вещественной проективной плоскости $\mathbb{P}^2$ с однородными координатами $(x_0 : x_1 : x_2)$, где $x = x_1/x_0,\ y = x_2/x_0$. На прямой $\mathbb{P}^1_\infty$ рассмотрим пару точек $I = (0 : 1 : i)$ и $I = (0 : 1 : -i)$, где $i = \sqrt{-1}$. Пара точек $\{I,\ J\}$ называется *абсолютом* или *циклическими точками.*

Задача 3. Проверьте, что вещественная коника $\mathcal{C}$ в $\mathbf{R}^2$ является окружностью тогда и только тогда, когда она пересекает прямую $\mathbb{P}^1_\infty$ в абсолюте $\{I,\ J\}$.

Задача 4. Докажите, что прямые l_1 и l_2 в $\mathbf{R}^2$ перпендикулярны друг другу тогда и только тогда, когда их продолжения в $\mathbb{P}^2$ пересекают $\mathbb{P}^1_\infty$ в точках L_1 и L_2, гармонически делящих абсолют $\{I,\ J\}$.

Задача 5. Пользуясь предыдущей задачей, докажите средствами проективной геометрии в плоскости $\mathbb{P}^2 = \mathbf{R}^2 \cup \mathbb{P}^1_\infty$, что три высоты в треугольнике пересекаются в одной точке.