Геометрическое введение в алгебраическую геометрию. Осень 2023г

Решения этих задач будут обсуждаться на следующем занятии. Внятно записанные (а лучше затеханные) решения можно присылать на почту alggem23@gmail.com, желательно до 24:00 субботы перед следующим занятием.

Задания с 8 занятия.

(1) На занятии мы дали определение производной $P'(t)$ многочлена $P(t) \in \mathbb{K}[t]$ и частных производных $\frac{\partial F}{\partial t_i}$ многочлена $F(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{K}[t_1, \ldots, t_n]$.

а) Докажите формулу Эйлера: если $F(x_1, \ldots, x_n)$ — однородная форма степени m, то

$$\sum_1^n x_i \frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n) = mF(x_1, \ldots, x_n).$$

б) Докажите формулу дифференцирования сложной функции: если $F(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{K}[t_1, \ldots, t_n]$ и $G_i(t) \in \mathbb{K}[t]$, то производная многочлена $H(t) = F(G_1(t), \ldots, G_n(t))$ вычисляется по формуле

$$H'(t) = \sum_1^n \frac{\partial F}{\partial t_i}(G_1(t), \ldots, G_n(t))\ G_i'(t).$$

(2) Докажите, что если гиперповерхность $X \in \mathbb{P}^n$ задается однородной формой $F(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, и $a \in X$ — простая точка этой гиперповерхности, то проективное касательное пространство $\mathbb{T}_a X$ (определения есть в задаче 4 позапрошлого домашнего задания) задается уравнением $\sum_0^n x_i \frac{\partial F}{\partial x_i}(a_0, a_1, \ldots, a_n) = 0$.

(3) Докажите топологическое утверждение, которое мы использовали при доказательстве теоремы о замкнутости образа проективного многообразия при регулярном отображении: если W топологическое пространство (в нашем случае с топологией Зарисского), $W = \bigcup V_i$, где все V_i открыты в W, то подмножество $Z \subset W$ замкнуто в W тогда и только тогда, когда каждое $Z \cap V_i$ замкнуто в V_i.

(4) Мы знаем, что через норм-кубику $X = v_{1,3}(\mathbb{P}^1) \subset \mathbb{P}^3$ проходит неособая квадрика $Q \subset \mathbb{P}^3$ (и даже целое двумерное семейство таких квадрик), и знаем, что любая неособая квадрика Q в $\mathbb{P}^3$ есть образ отображения Сегре $s_{1,1} : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^3$, поэтому если $X \subset Q = s_{1,1}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$, то $s_{1,1}^{-1}(X)$ является замкнутым подмногообразием в $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, и, следовательно, задется уравнениями от координат в $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, однородными по каждой группе переменных. Обозначим координатты в $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ через $((t_0 : t_1); (s_0 : s_1))$. Покажите, что $s_{1,1}^{-1}(X)$ задается одной формой $F((t_0 : t_1); (s_0 : s_1))$, однородной по переменным $(t_0 : t_1)$ и по переменным $(s_0 : s_1)$. Каковы степени формы F по каждой группе переменных?

(5) Осталась задача 7 из прошлого задания.