Прикладные методы анализа – 2023

1 Интегралы типа Коши и их граничные значения. Формулы Сохоцкого-Племеля

2 Обобщенные функции

3 Гармонические функции и краевые задачи

4 Теория потенциала

5 Цилиндрические и сферические функции

6 Уравнение теплопроводности

7 Некоторые задачи спектральной геометрии

Если дана область D на плоскости (для простоты ограничимся случаем двух измерений), можно поставить задачу о нахождении собственных значений λ_n оператора Лапласа в ней (с нулевыми граничными условиями). По крайней мере для простых областей эта задача эффективно разрешима. Предмет спектральной геометрии – установление соответствия между геометрией области и множеством собственных значений оператора Лапласа в ней. Основные вопросы – в какой мере набор собственных значений характеризует геометрию области, существуют ли различные области с одинаковым набором собственных значений? Иными словами, спектральная геометрия решает обратную задачу – восстановление области по набору собственных значений. Если вспомнить, что собственные значения оператора Лапласа в области – это квадраты частот собственных колебаний мембраны с закрепленной границей, то по образному выражению М.Каца [11], вопрос заключается в том, можно ли услышать форму барабана.

В настоящее время многие вопросы спектральной геометрии остаются открытыми. Важную роль в анализе задач спектральной геометрии играет уравнение теплопроводности. Мы расскажем о некоторых известных результатах.

Асимптотика следа оператора $e^{t\Delta}$. Из полученной ранее лидирующей асимптотики следа оператора $e^{t\Delta}$,

$$\operatorname{tr} e^{t\Delta} = \sum_n e^{-\lambda_n t} \sim \frac{A}{4\pi t}, \quad t \to +0,$$

следует, что можно "услышать" площадь области $A = A(\mathsf{D})$, т.е. найти площадь, зная набор собственных значений. Легко видеть, что эта формула эквивалентна тому, что λ_n при $n \to \infty$ становится асимптотически пропорциональным n:

$$\lambda_n = \frac{4\pi n}{A} + \text{члены с более медленным ростом.}$$

Члены асимптотики, следующие за лидирующим, были найдены в работе [12] (в гораздо большей общности). Для плоских компактных областей с гладкой границей (возможно, неодносвязных) результат имеет вид

$$\sum_n e^{-\lambda_n t} = \frac{A}{4\pi t} - \frac{L}{8\sqrt{\pi t}} + \frac{\chi}{6} + O(\sqrt{t}), \quad t \to +0.$$

Здесь L – длина границы области D, а χ – ее эйлерова характеристика, т.е. $\chi = 1 - r$, где r – число дырок в области. Тем самым "услышать" можно не только площадь, но и периметр области, а также "на слух" узнать число дырок в ней.

Происхождение первого (лидирующего) члена этой асимптотики мы уже объяснили. Поясним, следуя статье [11], откуда берется следующий за лидирующим член. Он целиком обусловлен наличием границы. Поскольку

$$\sum_n e^{-\lambda_n t} = \int_{\mathsf{D}} G(z, z; t) d^2 z,$$

нам нужно знать асимптотику $G(z, z; t)$ при $t \to 0$. Как мы видели, лидирующий вклад равен $(4\pi t)^{-1}$, попробуем найти следующий. Для этого заметим, что лидирующий вклад в интеграл при $t \to 0$ набирается из интеграла по всему объему области D, а следующий, обусловленный наличием границы, идет от узкого слоя вблизи границы. Для точек вблизи границы она выглядит почти как прямая, так что приближенно вблизи границы мы имеем задачу на полуплоскости, решение которой известно. Легко видеть, что тепловое ядро на верхней полуплоскости дается формулой

$$G(z, \zeta; t) = \frac{e^{-\frac{|z-\zeta|^2}{4t}} - e^{-\frac{|z-\bar{\zeta}|^2}{4t}}}{4\pi t},$$

так что если для близкой к границе точки z мы обозначим через x расстояние от нее до границы, будем иметь

$$G(z, z; t) = \frac{1 - e^{-\frac{x^2}{t}}}{4\pi t} + \ldots .$$

Первое слагаемое – это уже известный нам объемный вклад, а второе – поправка, обусловленная наличием границы. Это выражение надо проинтегрировать вдоль всей границы по узкому слою некоторой малой ширины δ, в котором оно справедливо, так что поправка к $\mathrm{tr}(e^{t\Delta})$ запишется как

$$-\frac{1}{4\pi t}\oint_{\partial\mathsf{D}} ds \int_0^\delta e^{-\frac{x^2}{t}} dx.$$

Заметим, что с нашей точностью интеграл по x при $t \to 0$ можно распространить до ∞, поскольку отличие будет экспоненциально мало. Тогда

$$-\frac{1}{4\pi t}\oint_{\partial\mathsf{D}} ds \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{t}} dx = -\frac{L}{8\sqrt{\pi t}}.$$

Мы получили анонсированный выше второй член асимптотики. Найти из аналогичных простых соображений следующий член, $\chi/6$, не удается. Этот вклад был найден в статье [12], в том числе и в случаях гораздо большей общности (для многообразий в произвольном числе измерений с необязательно плоской метрикой).

Ниже нам потребуются первые три члена асимптотики диагонали теплового ядра при $t \to 0$. В этой связи отметим, что поскольку функция $e^{-\frac{x^2}{t}}$ при $t \to +0$ превращается в δ-функцию $\sqrt{\pi t}\,\delta(x)$, формулу

$$G(z,z;t) = \frac{1}{4\pi t} - \frac{e^{-\frac{x^2}{t}}}{4\pi t} + \dots.$$

можно формально представить как первые два члена ряда по степеням t в виде

$$G(z,z;t) = \frac{1}{4\pi t} - \frac{\delta_\Gamma(z)}{8\sqrt{\pi t}} + O(1),$$

где $\delta_\Gamma(z)$ – δ-функция, сосредоточенная на границе $\Gamma = \partial\mathsf{D}$, так что

$$\int_{\mathsf{D}} \delta_\Gamma(z) d^2z = \oint_\Gamma ds = L.$$

При этом мы считаем, что область интегрирования чуть-чуть выступает за пределы области D, иначе нам пришлось бы интегрировать δ-функцию в области, граница которой в точности совпадает с ее носителем, а такие интегралы плохо определены.

Наконец, выпишем следующий из результатов [12] третий член асимптотики, порядка $O(1)$, считая для простоты, что область односвязна:

$$G(z,z;t) = \frac{1}{4\pi t} - \frac{\delta_\Gamma(z)}{8\sqrt{\pi t}} + \frac{\kappa(z)\delta_\Gamma(z)}{12\pi} + O(\sqrt{t}).$$

Здесь $\kappa(z)$ – кривизна границы в точке $z \in \Gamma$. Она определяется как производная $\kappa = d\theta/ds$ угла θ наклона касательной к оси x по длине дуги кривой. Очевидно,

$$\oint_\Gamma \kappa(z) ds = 2\pi,$$

так что интеграл от третьего члена равен $1/6$.

Регуляризация детерминантов. Важная величина, которую можно составить из собственных значений – это детерминант. Детерминант матрицы конечного размера равен произведению ее собственных значений. Оказывается, можно некоторым образом определить детерминант оператора с бесконечным числом собственных значений и в том случае, когда их произведение расходится и формально равно бесконечности (как, например, в случае оператора Лапласа).

Для оператора Лапласа формальное выражение

$$\det(-\Delta) = \prod_n \lambda_n$$

не имеет смысла, т.к. $\lambda_n \sim cn$ при $n \to \infty$, и произведение со страшной силой расходится. Однако, из собственных значений можно составить и сходящиеся выражения, например, дзета-функцию

$$\zeta_\Delta(s) = \sum_n \lambda_n^{-s}.$$

Этот ряд сходится при $\mathrm{Re}s > 1$ и определяет аналитическую функцию комплексного переменного s, которую можно аналитически продолжать и за пределы области $\mathrm{Re}s > 1$. Поскольку

$$\zeta_\Delta'(s) = -\sum_n \lambda_n^{-s} \log \lambda_n,$$

за определение детерминанта можно взять

$$\det(-\Delta) = e^{-\zeta_\Delta'(0)},$$

где $\zeta_\Delta'(0)$ – уже конечная величина, равная значению производной аналитического продолжения дзета-функции в нуле. Об этом определении говорят как о регуляризации расходящегося детерминанта.

Более практический (и на самом деле эквивалентный) способ регуляризации детерминанта заключается в следующем. Вспомнив определение гамма-функции,

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t} dt,$$

запишем дзета-функцию оператора Лапласа в виде

$$\zeta_\Delta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \Big(\sum_n e^{-\lambda_n t}\Big) t^{s-1} dt,$$

тогда

$$\log \det(-\Delta) = -\zeta_\Delta'(0) = -\int_0^\infty \Big(\sum_n e^{-\lambda_n t}\Big) \frac{dt}{t} = -\int_0^\infty \mathrm{tr}(e^{t\Delta}) \frac{dt}{t}.$$

Однако, это выражение не имеет смысла, т.к. интеграл расходится на нижнем пределе. Это прямое отражение исходной расходимости произведения собственных значений. Чтобы придать интегралу смысл (регуляризовать его), введем малый параметр $\varepsilon > 0$ ("параметр обрезания" в физической терминологии) и заменим нижний предел на ε. Эта процедура позволяет корректно определить "детерминант" $\det_\varepsilon(-\Delta)$, зависящий от ε:

$$\log \det_\varepsilon(-\Delta) = -\int_\varepsilon^\infty \mathrm{tr}(e^{t\Delta}) \, \frac{dt}{t}.$$

Конечно, это выражение обращается в бесконечность при $\varepsilon = 0$. Указанная выше асимптотика следа оператора $e^{t\Delta}$ фиксирует расходящиеся члены:

$$\log\det{}_\varepsilon(-\Delta) = -\frac{A}{4\pi\varepsilon} + \frac{L}{4\sqrt{\pi\varepsilon}} + \frac{\chi}{6}\,\log\varepsilon + O(1), \quad \varepsilon\to 0.$$

Регуляризованный детерминант определяется как конечная часть $\log\det_\varepsilon(-\Delta)$, т.е. как предел $\log\det_\varepsilon(-\Delta)$ с вычтенными расходящимися членами:

$$\log\det(-\Delta) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\log\det{}_\varepsilon(-\Delta) + \frac{A}{4\pi\varepsilon} - \frac{L}{4\sqrt{\pi\varepsilon}} - \frac{\chi}{6}\,\log\varepsilon\right).$$

Простой пример: $\det(\partial_x^2)$ **на отрезке.** Иллюстрируем процедуру регуляризации детерминанта на простом одномерном примере. Рассмотрим одномерный оператор Лапласа ∂_x^2 на отрезке $[0, L]$, действующий на функции, равные нулю на концах отрезка. Как мы уже не раз убедились, его собственные значения

$$\lambda_n = \Big(\frac{\pi n}{L}\Big)^2, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Тогда

$$\zeta_{\partial_x^2}(s) = \Big(\frac{L}{\pi}\Big)^{2s}\sum_{n\geq 1} n^{-2s} = \Big(\frac{L}{\pi}\Big)^{2s}\zeta(2s),$$

где $\zeta(s)$ – дзета-функция Римана

$$\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} n^{-s}.$$

Как известно, ее аналитическое продолжение – регулярная функция в 0, и

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}, \qquad \zeta'(0) = -\frac{1}{2}\,\log(2\pi).$$

Это дает явную формулу для детерминанта как функции от L (а других параметров в задаче и нет):

$$\log\det(-\partial_x^2) = -\zeta'_{\partial_x^2}(0) = \log L + \frac{1}{2}\,\log\frac{2}{\pi}.$$

Теперь сравним этот результат с

$$\log\det{}_\varepsilon(-\partial_x^2) = -\int_\varepsilon^\infty \frac{dt}{t}\,\mathrm{tr}(e^{t\partial_x^2}).$$

В принципе $\mathrm{tr}(e^{t\Delta})$ в этой простой задаче может быть найден точно в терминах тэта-функций Якоби. Мы, однако, воспользуемся другим способом и вычислим вариацию логарифма детерминанта при малом изменении L, после чего интегрированием можно будет найти и сам логарифм детерминанта как функцию от L (с точностью до аддитивной константы). Для этого нам потребуется только знание асимптотики $\mathrm{tr}(e^{t\partial_x^2})$ при $t\to +0$. Чтобы ее найти, воспользуемся формулой суммирования Пуассона, из которой следует тождество

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi a n^2} = \frac{1}{\sqrt{a}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2/a}.$$

Применив эту формулу, найдем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2 tn^2}{L^2}} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi^2 tn^2}{L^2}} - 1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{L}{\sqrt{\pi t}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\frac{L^2 n^2}{t}} - 1\right)$$

$$= \frac{L}{2\sqrt{\pi t}} - \frac{1}{2} + \frac{L}{\sqrt{\pi t}}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{L^2 n^2}{t}}.$$

Отсюда

$$\operatorname{tr}(e^{t\partial_x^2}) = \frac{L}{2\sqrt{\pi t}} - \frac{1}{2} + O\Big(\frac{1}{\sqrt{t}}\, e^{-\frac{L^2}{t}}\Big), \quad t \to +0.$$

Теперь нам нужно найти вариацию оператора ∂_x^2 при малом изменении L. Как это делать, не вполне ясно, поскольку при разных L эти операторы действуют на разных пространствах. Мы можем, однако, заставить их действовать на одном фиксированном пространстве (скажем, на постранстве функций на отрезке $[0,1]$), если сделать преобразование подобия и ввести переменную $w = x/L$, тогда $\partial_x^2 = L^{-2}\partial_w^2$, и

$$\delta(\partial_x^2) = -\frac{2\delta L}{L^3}\,\partial_w^2.$$

Для вариации $\log\det_\varepsilon(-\partial_x^2)$ при этом получаем:

$$\delta\log\det_\varepsilon(-\partial_x^2) = -\int_\varepsilon^\infty \frac{dt}{t}\operatorname{tr}\left(t\delta(\partial_x^2)e^{t\partial_x^2}\right) = \frac{2\delta L}{L^3}\int_\varepsilon^\infty dt\operatorname{tr}\left(\partial_w^2 e^{t\partial_x^2}\right)$$

$$= \frac{2\delta L}{L}\int_\varepsilon^\infty dt\operatorname{tr}\left(\partial_x^2 e^{t\partial_x^2}\right) = \frac{2\delta L}{L}\int_\varepsilon^\infty dt\,\partial_t\operatorname{tr}\left(e^{t\partial_x^2}\right) = -\frac{2\delta L}{L}\operatorname{tr}(e^{\varepsilon\partial_x^2}).$$

Подставляя сюда асимптотику при $\varepsilon \to 0$, находим:

$$\delta\log\det_\varepsilon(-\partial_x^2) = -\frac{\delta L}{\sqrt{\pi\varepsilon}} + \frac{\delta L}{L} + O\Big(\varepsilon^{-1/2}e^{-L^2/\varepsilon}\Big),$$

так что

$$\log\det_\varepsilon(-\partial_x^2) = -\frac{L}{\sqrt{\pi\varepsilon}} + \log L + C.$$

Вычитая расходящуюся часть, получаем

$$\log\det(-\partial_x^2) = \log L + C,$$

где C – ни от чего не зависящая константа, которую нельзя найти вариационным методом. Мы видим, что этот результат согласуется с полученным регуляризацией с помощью дзета-функции. Этот простой пример наглядно иллюстрирует логику того, что мы будем делать в более серьезной задаче нахождения детерминанта оператора Лапласа в области D на плоскости.

Детерминант оператора Лапласа в области на плоскости. Займемся нахождением детерминанта оператора Лапласа в компактной области D на плоскости. Для простоты будем предполагать, что область односвязная и ее граница гладкая.

Как и в предыдущем примере, проще искать не сам детерминант, а его вариацию при малой деформации области:

$$\delta \log \det_\varepsilon(-\Delta) = -\delta \int_\varepsilon^\infty \frac{dt}{t}\,\mathrm{tr}(e^{t\Delta}) = -\int_\varepsilon^\infty dt\,\mathrm{tr}(\delta\Delta e^{t\Delta}).$$

Для этого нам надо найти вариацию $\delta\Delta$ оператора Лапласа. Опять возникает такая проблема, что операторы Лапласа в исходной и деформированной областях действуют на разных функциональных пространствах, и непонятно, как их сравнивать. Как и в предыдущем примере, мы решим эту проблему тем, что отобразим наши области на какую-то фиксированную каноническую область, например, на единичный круг. Пусть $w(z)$ – конформное отображение области D на единичный круг, и w – комплексная координата внутри единичного круга, тогда $\partial_z = w'(z)\partial_w$, и

$$\Delta_z = 4\partial_z\partial_{\bar z} = 4|w'(z)|^2\partial_w\partial_{\bar w} = |w'(z)|^2\Delta_w$$

Отметим, что поскольку отображение конформное, $w'(z) \neq 0$ в D. Обозначим через $z(w)$ обратное конформное отображение (из единичного круга на область D) и введем функции

$$\psi(z) = \log|w'(z)|, \quad \phi(w) = \log|z'(w)|.$$

Поскольку $w'(z)z'(w(z)) = 1$, имеем $\psi(z(w)) = -\phi(w)$. Поэтому формулу, связывающие операторы Лапласа в координатах z и w можно записать в виде

$$\Delta_z = e^{-2\phi(w)}\Delta_w.$$

Малая деформация области приводит к малому изменению функции $w(z)$, а вместе с ней и $\psi(z)$, $\phi(w)$. Из предыдущей формулы следует, что вариация оператора Лапласа при этом равна

$$\delta\Delta_z = -2\delta\phi(w(z))\,\Delta_z.$$

Здесь подразумевается, что вариацию $\delta\phi$ нужно брать при фиксированном w, а обозначение $\delta\phi(w(z))$ означает, что после нахождения вариации при фиксированном w ее надо рассматривать как функцию от точки области z с помощью отображения $z(w)$. Зная вариацию оператора Лапласа, найдем:

$$\delta \log \det_\varepsilon(-\Delta) = -\int_\varepsilon^\infty dt\,\mathrm{tr}(\delta\Delta e^{t\Delta}) = 2\int_\varepsilon^\infty dt\,\mathrm{tr}(\delta\phi\Delta e^{t\Delta})$$

$$= 2\int_\varepsilon^\infty dt\,\partial_t \mathrm{tr}(\delta\phi e^{t\Delta}) = -2\mathrm{tr}(\delta\phi e^{\varepsilon\Delta}),$$

поскольку на верхнем пределе $\mathrm{tr}(\delta\phi e^{t\Delta})$ равно 0. Распишем подробнее, что такое $\mathrm{tr}(\delta\phi e^{\varepsilon\Delta})$:

$$\mathrm{tr}(\delta\phi e^{\varepsilon\Delta}) = \int_{\mathsf{D}} \delta\phi(w(z))G(z,z;\varepsilon)d^2z.$$

Нам нужна асимптотика этого выражения при $\varepsilon \to 0$ вплоть до членов порядка $O(1)$. Очевидно, для этого нужно знать неисчезающие члены асимптотики теплового ядра $G(z,\zeta;\varepsilon)$ на диагонали (при $\zeta = z$). Как мы видели,

$$G(z,z;\varepsilon) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} - \frac{\delta_\Gamma(z)}{8\sqrt{\pi\varepsilon}} + \frac{\kappa(z)\delta_\Gamma(z)}{12\pi} + O(\sqrt{\varepsilon}).$$

Подставляя это в формулу для $-2\mathrm{tr}(\delta\phi e^{\varepsilon\Delta})$, имеем три вклада. Первый из них есть

$$-\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{\mathsf{D}}\delta\phi(w(z))d^2z.$$

Преобразуем входящий сюда интеграл:

$$\int_{\mathsf{D}}\delta\phi(w(z))d^2z=\int_{|w|\le 1}|z'(w)|^2\delta\phi(w)d^2w=\int_{|w|\le 1}|z'(w)|^2\frac{\delta|z'(w)|}{|z'(w)|}\,d^2w$$

$$=\frac{1}{2}\,\delta\int_{|w|\le 1}|z'(w)|^2d^2w=\frac{1}{2}\,\delta\int_{\mathsf{D}}d^2z=\frac{\delta A}{2}.$$

Тем самым первый вклад равен $-\dfrac{\delta A}{4\pi\varepsilon}$. Аналогично для второго вклада получаем $\dfrac{\delta L}{4\sqrt{\pi\varepsilon}}$. Наконец, третий вклад запишется в виде $-\dfrac{1}{6\pi}\oint_{\Gamma}\kappa(z)\delta\phi(w(z))ds$. Собирая все вместе, имеем:

$$\delta\log\det{}_{\varepsilon}(-\Delta)=-\frac{\delta A}{4\pi\varepsilon}+\frac{\delta L}{4\sqrt{\pi\varepsilon}}-\frac{1}{6\pi}\oint_{\Gamma}\kappa(z)\delta\phi(w(z))ds+O(\sqrt{\varepsilon}).$$

Теперь надо проинтегрировать это выражение. Первые два члена интегрируются очевидным образом. Осталось выяснить, вариацией какого функционала I является выражение

$$\delta I=\oint_{\Gamma}\kappa(z)\delta\phi(w(z))ds.$$

Для этого выразим кривизну в терминах конформного отображения $z(w)$:

$$\kappa(z)=\partial_{n_z}\log\left|\frac{w(z)}{w'(z)}\right|=|w'(z)|-\partial_{n_z}\log|w'(z)|=\frac{1}{|z'(w)|}+\frac{\partial_{n_w}\log|z'(w)|}{|z'(w)|}.$$

Поэтому

$$\delta I=\oint_{|w|=1}\Big(\partial_n\phi(w)+1\Big)\delta\phi(w)|dw|,$$

что очевидным образом есть вариация функционала

$$I=\frac{1}{2}\oint_{|w|=1}\Big(\phi\partial_n\phi+2\phi\Big)|dw|.$$

Итак,

$$\log\det{}_{\varepsilon}(-\Delta)=-\frac{A}{4\pi\varepsilon}+\frac{L}{4\sqrt{\pi\varepsilon}}-\frac{1}{6\pi}\,I+O(\sqrt{\varepsilon})+\mathrm{const}.$$

Отсюда находим регуляризованный детерминант:

$$\log\det(-\Delta)=-\frac{1}{12\pi}\oint_{|w|=1}\Big(\phi\partial_n\phi+2\phi\Big)|dw|+C.$$

Здесь C – некоторая константа, не зависящая от формы области. Этот результат – частный случай более общей формулы Полякова-Альвареса для регуляризованных детерминантов оператора Лапласа-Бельтрами на не обязательно плоских поверхностях.

Отметим, что конформное отображение $z(w)$ (или обратное к нему $w(z)$) не единственно, т.к. единичный диск имеет нетривиальные конформные автоморфизмы. Чтобы его зафиксировать, надо наложить условие нормировки, например, в виде $w(a) = 0$, $w'(a) > 0$ для некоторой точки $a \in \mathsf{D}$. Удобно считать, что $0 \in \mathsf{D}$ и выбрать $a = 0$, тогда вещественная положительная величина $r_0 = 1/w'(0)$ называется конформным радиусом области D (для круга она равна его радиусу). Показать, что регуляризованный детерминант не зависит[1] от нормировки конформного отображения, входящего в формулу Полякова-Альвареса, – хорошее упражнение.

Список литературы

[1] М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат, *Методы теории функций комплексного переменного*, Наука, Москва, 1973.

[2] Ф.Д. Гахов, *Краевые задачи*, Наука, Москва, 1977.

[3] И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилов, *Обобщенные функции и действия над ними*, Москва, 1959.

[4] В.С. Владимиров, *Уравнения математической физики*, Наука, Москва, 1985.

[5] В.С. Владимиров, В.В. Жаринов, *Уравнения математической физики*, Москва, 2000.

[6] А.Н. Тихонов, А.А. Самарский, *Уравнения математической физики*, Наука, Москва, 1977.

[7] P. Wiegmann, A. Zabrodin, *Conformal maps and integrable hierarchies*, Communications in Mathematical Physics, **213** (2000) 523–538.

[8] В.И. Арнольд, *Лекции об уравнениях с частными производными*, Фазис, Москва, 1999.

[9] А.Ф. Никифоров, В.Б. Уваров, *Специальные функции математической физики*, Наука, Москва, 1984.

[10] Я.Б. Зельдович, А.Д. Мышкис, *Элементы математической физики*, Наука, Москва, 1973.

[11] M. Kac, *Can one hear the shape of a drum?*, American Mathematical Monthly, Volume 73 (1966), Issue 4, Part 2: Papers in Analysis, 1–23.

[12] H.P. McKean, Jr., I.M. Singer, *Curvature and the eigenvalues of the Laplacian*, J. Differential Geom. **1** (1967) 43–69.

[1] Точнее, выбор нормировки влияет только на значение константы C.