Задачи 5. 14.11.2023

На лекции мы обсуждали закон больших чисел (ЗБЧ), классический и для цепей Маркова. А вот *усиленный* классический ЗБЧ:

Теорема. Пусть случайные величины $\eta_0, \eta_1, \ldots$ независимы и имеют конечный второй момент, т.е. $\mathbb{E}\eta_j^2 < \infty$ (в частности, отсюда следует $\mathbb{E}|\eta_j| < \infty$ – докажите!), и их дисперсии $\operatorname{Var}\eta_j$ ограничены равномерно по j. Тогда случайная величина $S_n = \sum_{j=0}^{n-1} \eta_j$ удовлетворяет

$$\mathbb{P}\left(\omega \in \Omega : \frac{S_n(\omega) - \mathbb{E}S_n}{n} \to 0 \text{ при } n \to \infty\right) = 1.$$

Такая сходимость называется *сходимостью почти наверное (или почти всюду).* Обозначается $\dfrac{S_n - \mathbb{E}S_n}{n} \to 0$ п.н. (либо п.в.; на английском – a.s. (almost surely) или a.e. (almost everywhere)). Из сходимости почти наверное *следует* сходимость по вероятности, но обратное неверно. Вид сходимости — единственное различие между усиленным и обычным ЗБЧ. Доказательство усиленного ЗБЧ несколько сложнее, чем обычного, см. например учебник Ширяева.

Для марковских цепей также верен усиленный ЗБЧ. Его формулировка совпадает с формулировкой обычного ЗБЧ, данной на лекции, но вместо сходимости по вероятности имеет место сходимость почти наверное. Далее под ЗБЧ мы понимаем обычный ЗБЧ. Однако, в некоторых из задач нужно использовать усиленный ЗБЧ. В этом случае в указаниях к задаче дан соответствующий комментарий.

1. Предположим, что две последовательности действительнозначных случайных величин (ξ_n) и (η_n), определенных на одном и том же вероятностном пространстве, удовлетворяют $\xi_n \to \xi$ и $\eta_n \to \eta$ по вероятности, для некоторых случайных величин ξ и η. Докажите, что $\xi_n + \eta_n \to \xi + \eta$ по вероятности.

2. Рассмотрим последовательность независимых случайных величин, принимающих не более, чем счетное число значений. Образует ли она цепь Маркова? Если да, то найдите ее переходные вероятности и придумайте дополнительное условие на эти случайные величины, чтоб полученная цепь была однородной.

3. Приведите пример (однородной) не перемешивающей цепи Маркова, имеющей по крайней мере два состояния, для которой выполнен ЗБЧ.

   Указание: возможно, здесь удобнее искать пример, для которого выполнен усиленный ЗБЧ (конечно, обычный при этом тоже будет выполняться).

4. Приведите пример цепи Маркова $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots$, для которой не выполнен ЗБЧ. Точнее, такой цепи, для которой существует функция f, что предел последовательности $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f(\xi_k)$ по вероятности либо не существует, либо зависит от начального условия.

5. Компания "Рога и Копыта" плохо пережила финансовый кризис и стала выплачивать дивиденды своим акционерам нерегулярно. И если в данном квартале она не выплатила дивиденды, то в следующем квартале она их не выплатит с вероятностью 0.6. Но если дивиденды были выплачены, то в следующем квартале они будут выплачены с вероятностью 0.9. При условии, что компания не оправится от кризиса в течение достаточно длительного времени, какой процент от максимально возможного числа дивидендных выплат за этот период стоит ожидать получить ее акционерам?