Задачи 6. 17.11.2023

Рассмотрим однородную марковскую цепь $\xi_0, \xi_1, \ldots$, определенную на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ с (конечным либо счетным) множеством состояний X (так что $\xi_j : \Omega \mapsto X$). Рассмотрим случайную величину τ на том же вероятностном пространстве, такую что для каждого $n \geq 0$ событие $\{\tau = n\}$ лежит *в алгебре, порожденной случайными величинами* $\xi_0, \ldots, \xi_n$. Это означает, что для каждого n существует такое множество $A_n \subset X^{\times n}$ [1], что множество $\{\omega \in \Omega : \tau(\omega) = n\}$ имеет вид $\{\omega \in \Omega : (\xi_0, \ldots, \xi_n)(\omega) \in A_n\}$. Такая случайная величина τ называется *моментом остановки (stopping time)*. Говоря неформально, τ — момент остановки, если для каждого n мы можем определить произошло ли событие $\{\tau = n\}$, зная траекторию марковской цепи вплоть до момента времени n. К примеру, случайная величина $\tau_A = \inf\{n \geq 0 : \xi_n \in A\}$, где $A \subset X$, является моментом остановки (ее смысл – первый момент времени, когда процесс входит в множество A; здесь и далее $\inf \emptyset := \infty$). А случайная величина $\widetilde{\tau}_A = \inf\{n \geq 0 : \xi_{n+1} \in A\}$ не является моментом остановки. Отмечу, что константа — также момент остановки.

1. Рассмотрим однородную марковскую цепь $\xi_0, \xi_1, \ldots$ с вероятностями перехода (p_{ij}) и момент остановки τ. Докажите *сильное марковское свойство (strong Markov property)*:

   $$\mathbb{P}(\xi_{\tau+1} = j | \xi_\tau = i, (\xi_{\tau-1}, \ldots, \xi_0) \in B_{<\tau}, \tau < \infty) = \mathbb{P}(\xi_{\tau+1} = j | \xi_\tau = i, \tau < \infty) = p_{ij},$$

   для всех i, j и произвольного набора множеств $B_{<n} \subset X^{\times n}$, $n \geq 1$.

   Комментарий: Если $\tau = const$, то сильное марковское свойство превращается в обычное марковское свойство. Можно показать, что сильное марковское свойство переговаривается следующим образом: при условии, что $\tau < \infty$ и $\xi_\tau = i$, случайный процесс $(\xi_{\tau+n})_{n\geq 1}$ не зависит от процесса $(\xi_n)_{n\leq\tau}$ и имеет такое же распределение, как исходный процесс $(\xi_n)_{n\geq 0}$, взятый при условии, что $\xi_0 = i$. Отсюда становится понятным, почему сильное марковское свойство столь часто используется при решении различных задач, связанных с марковскими цепями. В частности, оно позволяет дать ответ на вопрос как ведет себя цепь начиная с момента ее входа в некоторое множество $A \subset X$, то есть начиная с момента τ_A: она ведет себя так же, как исходная цепь, с начальным условием в точке, через которую вы вошли в A.

2. * Рассмотрим экспоненциально перемешивающую марковскую цепь с множеством значений $X = \{1, 2, \ldots\}$ и стационарным состоянием $\pi = (\pi_1, \pi_2, \ldots)$. Допустим, что $\pi_1 > 0$. Рассмотрим следующую последовательность моментов остановки:

   $$\tau_1 = \inf\{k \geq 0 : \xi_k = 1\}, \quad \tau_n = \inf\{k > \tau_{n-1} : \xi_k = 1\}, \quad n \geq 2,$$

   где $\inf \emptyset := \infty$. Таким образом, τ_n— n-ый момент попадания процесса в состояние 1.

[1] Через $X^{\times n}$ я обозначил прямое произведение n копий множества X.

а) Докажите, что для каждого начального распределения $p^{(0)}$ верно $\mathbb{E}(\tau_1)^r < \infty$ для любого $r \geq 0$ (говорят, что случайная величина τ_1 имеет *конечные моменты*). Как следствие, покажите, что при каждом начальном распределении $p^{(0)}$ имеем $\mathbb{P}(\tau_1 < \infty) = 1$.

Указание: используя сходимость переходных вероятностей за n шагов $p_{ij}^{(n)} \to \pi_j$ при $n \to \infty$, следующую из перемешивания цепи, оцените сверху вероятность $\mathbb{P}(\tau_1 > k)$.

б) Докажите, что случайные величины τ_1 и $\tau_2 - \tau_1$ независимы, а если начальное распределение удовлетворяет $p_1^{(0)} = 1$ (то есть, в начальный момент времени мы сидим в состоянии 1), то они одинаково распределены. Выведите отсюда, что $\mathbb{E}(\tau_2)^r < \infty \; \forall r > 0$.

в) Рассуждая аналогично, докажите, что τ_1, $\tau_2 - \tau_1$, $\tau_3 - \tau_2$, $\ldots$ — последовательность независимых случайных величин. Покажите, что эти случайные величины, кроме τ_1, имеют одинаковое распределение, а в случае, когда $p_1^{(0)} = 1$, и τ_1 имеет то же распределение. Покажите, что $\mathbb{E}(\tau_n)^r < \infty \; \forall r > 0$.

г) Докажите, что $\tau_n / n \to \mathbb{E}(\tau_2 - \tau_1)$ при $n \to \infty$, п.н.

Указание: пусть $\nu_1(n) = \#\{0 \leq i \leq n - 1 : \xi_i = 1\}$. Используя усиленный закон больших чисел для цепей Маркова, найдите предел последовательности $\nu_1(\tau_n)/\tau_n$. Чему равно $\nu_1(\tau_n)$?

д) Докажите, что $\mathbb{E}(\tau_2 - \tau_1) = (\pi_1)^{-1}$.

Таким образом, мы получаем замечательный неочевидный факт: среднее время между первым и вторым посещением данного состояния составляет стационарную вероятность этого состояния в степени -1. Качественно этот результат интуитивен, а вот количественно, пожалуй, совсем нет.