Задачи 7
25.11.2023

1. Рассмотрим однородную марковскую цепь с переходными вероятностями (p_{ij}). Докажите, что если распределение π удовлетворяет соотношениям

$$\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji} \qquad \forall i, j,$$

то π — стационарное распределение. Верно ли обратное?

2. Используя алгоритм Метрополиса - Хастингса, постройте цепь Маркова с тремя состояниями, такую что распределение $\pi = (7/15, 1/5, 1/3)$ стационарно и других стационарных распределений нет.

3. Пусть S_n — множество всех перестановок длины $n \geq 1$. Имея в руках перестановку $\sigma \in S_n$, мы совершаем случайную (возможно, тождественную) транспозицию t и получаем новую перестановку $\sigma' = \sigma \circ t$ (все транспозиции имеют одинаковую вероятность). Затем мы итерируем процесс, стартуя с транспозиции σ'. Получаем цепь Маркова. Найдите ее вероятности перехода и докажите, что она перемешивает.

4. Докажите пункт 2 теоремы Перрона-Фробениуса.

5. Найдите предел A^n при $n \to \infty$, где $A = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$. Объясните.