Листок 6

ТЕОРИЯ МИНИМАЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЙ
МИНИМАЛЬНЫЕ ПОДМНОГООБРАЗИЯ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

1. Докажите, что часть геликоида, заключенная в прямом цилиндре вращения, является минимальной поверхностью со свободной границей в этом цилиндре с внутренностью.

2. Пусть M – минимальное подмногообразие со свободной границей в $\mathbb{B}^n$. Может ли быть так, что ∂M целиком находится в полусфере?

3. Рассмотрим стандартную параметризацию катеноида

$$u(t,\theta) = (\operatorname{ch} t\cos\theta, \operatorname{ch} t\sin\theta, t),\ \ 0 \leqslant \theta < 2\pi, t \in \mathbb{R}.$$

(а) Найдите значение T_K такое, что u органиченное на $\mathbb{S}^1 \times [-T_K, T_K]$ задаёт минимальный цилиндр со свободной границей в шаре $\mathbb{B}^3_R(p)$. Найдите радиус R и центр p этого шара.

(б) Используя пункт (а), найдите параметризацию *критического катеноида*, то есть минимального цилиндра со свободной границей в единичном шаре $\mathbb{B}^3$.

(в) Найдите длину границы критического катеноида, а также его площадь.

4. Рассмотрим следующее вложение листа Мёбиуса в $\mathbb{E}^4$

$$u(t,\theta) = (2\operatorname{sh} t\cos\theta, 2\operatorname{sh} t\sin\theta, \operatorname{ch} 2t\cos 2\theta, \operatorname{ch} 2t\sin 2\theta),\ \ 0 \leqslant \theta < 2\pi, t \in \mathbb{R},$$

где точки (t,θ) и $(-t,\theta+\pi)$ отождествлены.

(а) Найдите значение T_M такое, что u органиченное на $\mathbb{S}^1 \times [-T_M, T_M]$ задаёт минимальный лист Мёбиуса со свободной границей в шаре $\mathbb{B}^4_R(p)$. Найдите радиус R и центр p этого шара.

(б) Используя пункт (а), найдите параметризацию *критического листа Мёбиуса*, то есть минимального листа Мёбиуса со свободной границей в единичном шаре $\mathbb{B}^4$.

(в) Найдите длину границы критического листа Мёбиуса, а также его площадь.

5. Напомним, что оператор *Дирихле-к-Нейману* на римановом многообразии (M,g) с краем $\partial M \neq \emptyset$ задаётся как

$$\mathcal{D}\colon C^\infty(\partial M) \to C^\infty(\partial M),$$
$$\mathcal{D}\colon u \mapsto \frac{\partial \hat{u}}{\partial n_g}.$$

Здесь $\hat{u}$ — гармоническое продолжение функции u с границы ∂M на всё M, а n_g — векторное поле единичных нормалей к ∂M. Покажите, что $\mathcal{D}$ самосопряжён и неотрицательно определён.

6. Пусть (M,g) – n-мерное компактное риманово многообразие с краем.

(а) Докажите, что для k-го собственного числа Стеклова верно, что $\sigma_k(cg) = \frac{1}{\sqrt{c}}\sigma_k(g)$ для произвольной константы $c > 0$.

(б) Докажите, что величина $\sigma_k(g)Vol(\partial M, g)^{\frac{1}{n-1}}$ инвариантна относительно гомотетий.

7. (а) Пусть Σ — минимальная поверхность со свободной границей в $\mathbb{B}^3$. Докажите, что $\partial\Sigma$ — линия главной кривизны на Σ, т.е. касательная к $\partial\Sigma$ в любой точке совпадает с главным направлением на Σ.

(б) Пусть M — минимальная гиперповерхность со свободной границей в $\mathbb{B}^n$. Докажите, что ∂M омбилично в M, т.е. вдоль ∂M метрика пропорциональна второй квадратичной форме (со значением в числах).