Листок 7

ТЕОРИЯ МИНИМАЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЙ

УСТОЙЧИВОСТЬ, ИНДЕКС И ОБЪЁМЫ МИНИМАЛЬНЫХ ПОДМНОГООБРАЗИЙ

1. Пусть (Σ, g) – замкнутая гиперповерхность постоянной средней кривизны в $\mathbb{E}^{n+1}$, B – её вторая квадратичная форма и ν – поле единичных нормалей к Σ. Докажите, что для всякого фиксированного вектора $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ верно, что

$$\Delta_g \langle a, \nu\rangle_g = |B|_g^2 \langle a, \nu\rangle_g.$$

2. Найдите максимальный устойчивый подкатеноид в катеноиде в $\mathbb{E}^3$ симметричный относительно антиподального отображения, т.е. найдите расстояние между основаниями такого катеноида.

3. Докажите, что индекс геликоида бесконечен. Можно ли его разбить ровно на две устойчивые области?

4. Докажите, что индекс поверхности Эннепера равен 1.

Указание: Что представляет собой образ поверхности Эннепера при гауссовом отоборажении?

5. Пусть (M, g) – трёхмерное риманово многообразия кривизны не больше -1. Найдите оценку сверху на площадь минимальной поверхности рода γ в (M, g). Докажите, что в (M, g) нет минимальных сфер. Могут ли в (M, g) существовать минимальные торы?

6. Докажите, что минимально возможная площадь замкнутой минимальной поверхности в $(\mathbb{S}^3, g_{can})$ равна 4π. Получите оценку снизу на площадь замкнутой минимальной поверхности рода γ в $(\mathbb{S}^3, g_{can})$. Могут ли в $(\mathbb{S}^3, g_{can})$ существовать вполне геодезические торы?

7. Пусть Σ – вложенная полная минимальная поверхность в $\mathbb{E}^3$. Пусть ν – поле единичных нормалей. Зафиксируем постоянное поле v на $\mathbb{E}^3$ Рассмотрим гладкую функцию на Σ $f_v = \nu \cdot v$. Докажите, что поле $f_v \nu$ является *полем Якоби*, т.е. функция f_v удовлетворяет уравнению Якоби $L_g f_v = 0$.

8. Пусть $\Sigma \subset \mathbb{E}^3$ – полная минимальная поверхность, отличная от плоскости, и g – индуцированная метрика на ней. Рассмотрим гауссово отображение $G\colon \Sigma \to (S^2, g_0)$. Докажите, что

$$(a)\ G^* g_0 = -K_g g; \quad (b)\ \Delta_{G^* g_0} = -\frac{1}{K_g} \Delta_g.$$

Здесь K_g – гауссова кривизна (Σ, g).

9. Приведите пример голоморфной кривой в $\mathbb{E}^4$ со стандартной комплексной структурой, имеющую бесконечную полную гауссову кривизну.

10. (а) Рассмотрим экваториальный круг как минимальное подмногообразие со свободной границей в евклидовом единичном шаре. Докажите, что индекс экваториального круга в $\mathbb{B}^3$ равен 1. Для этого сначала покажите, что индекс экваториального круга хотя бы 1. Затем покажите, что индекс не более 1, используя факт, что плоский экваториальный круг имеет наименьшую площадь среди всех поверхностей, разбивающих $\mathbb{B}^3$ на две равновеликие части.

(б*) Докажите, что индекс экваториального круга в $\mathbb{B}^n$ равен $n - 2$.

Указание: Заметьте, что оператор Якоби расщепляется на скалярные операторы.