Геометрическое введение в алгебраическую геометрию. Осень 2023г

Решения этих задач будут обсуждаться на следующем занятии. Внятно записанные (а лучше затеханные) решения можно присылать на почту alggem23@gmail.com, желательно до 24:00 субботы перед следующим занятием.

Задания с 9 занятия.

(1) Покажите, что если $f : X \to Y$ — конечное отображение аффинных многообразий, а $V \subset Y$ — аффинное открытое подмножество, то, $\bar{f} : f^{-1}(V) \to V$ также является конечным отображением аффинных многообразий. (Здесь через $\bar{f}$ обозначено ограничение отображения f на $f^{-1}(V)$.)

(2) Докажите, что образ отображения Сегре $s_{1,n}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^n) \subset \mathbb{P}^{2n+1}$ имеет степень $n + 1$ (то есть пересечение его с общим $\mathbb{P}^n \subset \mathbb{P}^{2n+1}$ состоит из $n + 1$ точки).

(3) Рассмотрим замкнутое подмножество $Z \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$, заданное одним уравнением $t_0x_2 = t_1x_1$ (имеющим степень однородности 1 по каждой группе переменных), где $(t_0 : t_1)$ — координаты в $\mathbb{P}^1$, а $(x_0 : x_1 : x_2)$ — координаты в $\mathbb{P}^2$. Рассмотрим также отображения проектирования $\pi_i : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^i$, $i = 1, 2$, и обозначим через $\bar{\pi}_i$ ограничения отображений π_i на Z.

а) Покажите, что отображение $\bar{\pi}_1 : Z \to \mathbb{P}^1$ сюръективно и прообразом любой точки из $\mathbb{P}^1$ является прямая в $\mathbb{P}^2$. Покажите, что для каждой из двух аффинных карт $\mathbb{A}^1_i \subset \mathbb{P}^1$, заданных условием $t_i \neq 0$ $(i = 0, 1)$, прообраз $\bar{\pi}_1^{-1}(\mathbb{A}^1_i)$ изоморфен $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{P}^1$, и выведите из этого, что Z неприводимо.

б) Покажите, что отображение $\bar{\pi}_2 : Z \to \mathbb{P}^2$ сюръективно, но не является конечным отображением.

в) * Изоморфно ли Z прямому произведению $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$?

(4) Рассмотрим отображение Веронезе $v_{2,2} : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^5$, его образ $v_{2,2}(\mathbb{P}^2)$ обычно называют поверхностью Веронезе. Покажите, что хордовое многообразие поверхности Веронезе является гиперповерхностью в $\mathbb{P}^5$, и найдите степень этой гиперповерхности. Докажите, что множество особых точек этой гиперповерхности совпадает с поверхностью Веронезе.

(5) * Рассмотрим две кривые X и Y, задаваемые в $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ однородными формами F и G, имеющими по каждой группе переменных степени, соответственно, d_1 и d_2 у формы F и r_1 и r_2 у формы G. Пусть кривые X и Y имеют конечное число N общих точек. Каким может быть максимально возможное значение N? Считать теорему Безу для проективного пространства известной. (Эта задача возникла спонтанно, и я не уверен, что умею ее решать полностью только теми средствами, которые уже были рассказаны. Но можно хотя бы прикинуть какие-то частные случаи и попробовать угадать ответ...)