ОДУ-2023. Домашнее задание №6

Выдано 01.12.2023 Срок сдачи до **24:00 11.12.2023**

Аккуратно записанную и оформленную в виде единого pdf-файла работу надо послать на адрес закрепленного за Вами учебного ассистента. Распределение студентов по учебным ассистентам см. вверху на странице курса.

Задача 6.1. Для каждого значения параметра $a \in \mathbb{R}$ исследуйте поведение системы

$$\dot{x} = a\sin x + y + (a+1)x^2, \quad \dot{y} = x + ay\cos x.$$

вблизи особой точки $(0,0)$ и нарисуйте эскиз фазового портрета в её окрестности.

Для заданных функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$ найдите линейное однородное дифференциальное уравнение (с единичным коэффициентом при старшей производной), для которого $y_1(x)$ и $y_2(x)$ образуют фундаментальную систему решений. Найдите решение $y(x)$ соответствующего неоднородного уравнения для данной правой части $f(x)$ и заданных начальных данных.

Задача 6.2. $y_1(x) = x, \quad y_2(x) = x^2; \qquad f(x) = \dfrac{1}{x}, \quad y(1) = y'(1) = -1.$

Задача 6.3. $y_1(x) = x, \quad y_2(x) = e^x; \qquad f(x) = 1 - x^2, \quad y(0) = y'(0) = 0.$

Задача 6.4. а) Найдите, при каких $a \in \mathbb{R}$ система

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y + 2\cos(at) \\ \dot{y} = 2x - y + 2\cos(at) \end{cases}$$

имеет периодическое решение.
б) Для тех a, где периодического решения нет, решите систему.

Задача 6.5. а) Найдите два полиномиальных решения неоднородного уравнения

$$(3x^3 + x)y'' + 2y' - 6xy = 4 - 12x^2.$$

б) Найдите общее решение этого уравнения.

Бонусные задачи

Задача 6.6. Найдите значения частных производных $\partial x(t,\mu)/\partial\mu$ и $\partial y(t,\mu)/\partial\mu$ точного решения системы

$$\frac{dx}{dt} = xy + t^2, \quad \frac{dy}{dt} = -y^2/2, \qquad x(1) = 3,\ y(1) = \mu.$$

в точке $\mu = 2$.

Задача 6.7. Пусть $x(t,\mu)$ — решение задачи Коши

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2t + (\mu - 1)x^2}{\mu}, \qquad x(1) = \ln\,\mu.$$

Рассмотрим формулу Тейлора для $x(t,\mu)$ при $\mu = 1$. Пусть $x_{(j)}(t)$ — её коэффициенты. Вычислите явно $x_{(0)}(t)$ и $x_{(1)}(t)$ и выпишите задачу Коши для $x_{(2)}(t)$.