X — множество состояний, $|X|<\infty$, $X \simeq \{1,\dots,L\}$, $1\le L<\infty$.

в этой лекции рассматриваем только цепи с конечным числом состояний.

$\xi_0, \xi_1, \dots$ — однородная марковская цепь с матрицей переходных вероятностей Π.

Пусть $i,j\in X$, а $p_{ij}^{(k)}$ — элементы матрицы Π^k.

<u>Опр. 1</u> Состояние i <u>ведёт</u> (leads to) к состоянию j, если $\exists\, k\ge 0$, такое что $p_{ij}^{(k)}>0$

Другими словами, из состояния i возможно попасть в состояние j за $k\ge 0$ шагов.

<u>Обозначение:</u> $i\to j$.

<u>Опр. 2</u> Состояние i <u>сообщается</u> с (communicates with) состоянием j, если $i\to j$ и $j\to i$.

<u>Обозначение:</u> $i\leftrightarrow j$.

<u>Лемма 3</u> $\longleftrightarrow$ задаёт отношение эквивалентности

<u>Д-во:</u> • $i\leftrightarrow i$ — верно: $p_{ii}^{(0)}=1$

• $i\leftrightarrow j$, $j\leftrightarrow r \Rightarrow i\leftrightarrow r$ — верно:

если $p_{ij}^{(k)}>0$, $p_{jr}^{(m)}>0$, то по равенству Колмогорова-Чепмена (см. Следствие 4.10) $p_{ir}^{(k+m)}=\sum\limits_{\ell} p_{i\ell}^{(k)}p_{\ell r}^{(m)} \ge p_{ij}^{(k)}p_{jr}^{(m)}>0$.

Аналогично $p_{ri}^{(\ell)}>0$ для нек-го ℓ.

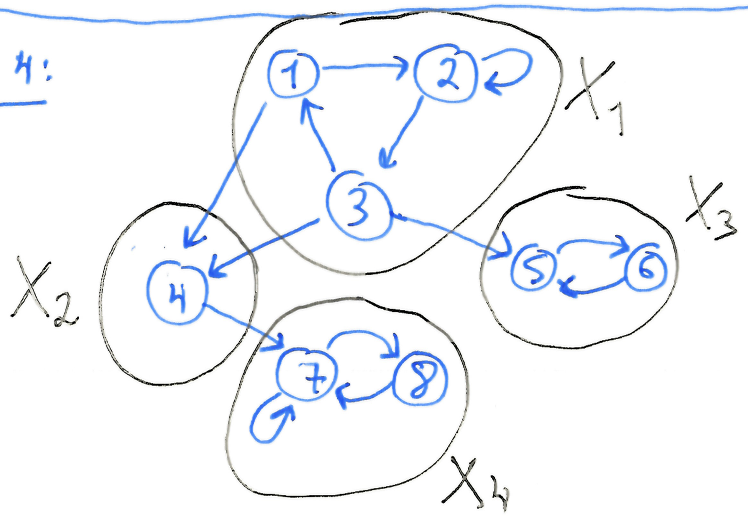
• $i\leftrightarrow j \Leftrightarrow j\leftrightarrow i$ — верно, по определению

▨

Согласно лемме 3, мн-во состояний X разбивается на классы эквивалентности $X = \bigcup_{k=1}^{m} X_k$, $X_k \cap X_l = \varnothing$ при $k \neq l$, так что состояния i и j лежат в одном и том же классе эквивалентности $\Leftrightarrow$ i сообщается с j.

Классы эквив. наз-ся классами сообщаемости

Пример 4:



Классы сообщаемости:

$X_1 = \{1,2,3\}$

$X_2 = \{4\}$

$X_3 = \{5,6\}$

$X_4 = \{7,8\}$.

Опр. 5 Класс сообщаемости X_k ведёт к классу сообщаемости X_l ($X_k \to X_l$), если из X_k можно пройти в X_l.

Аккуратнее, $\exists\ i \in X_k$, $j \in X_l$, $k > 0$, такие, что $p_{ij}^{(k)} > 0$.

Например, в примере 4 $\quad X_1 \to X_2, X_3, X_4$

$X_2 \to X_4$.

Отношение "ведёт к" ($\longrightarrow$) задаёт частичный порядок на множестве классов сообщаемости ($X_k > X_j$, если $X_k \to X_j$).

Следовательно, существуют минимальные классы сообщаемости. Обозначим их объединение через E. В примере 4, $E = X_3 \cup X_4 = \{5,6,7,8\}$.

Опр. 6 Состояния $j \in E$ называются существенными (essential), а состояния $i \notin E$ — несущественными (inessential). E наз-ся множеством существенных состояний.

Лемма 7 (а) $\mathbb{P}(\omega: \exists N = N(\omega)$, такое что $\xi_n(\omega) \in E \;\; \forall n \geq N) = 1$

(в) $\exists \;\; 0 < \lambda < 1, \; c > 0$, такие что $\mathbb{P}(\xi_n \notin E) \leq c\lambda^n$, для любого начального р-ия $p^{(0)}$.

Интерпретация: (а) рано или поздно всякая траектория войдёт в множество E существенных состояний и останется там навсегда.

(в) Вероятность оставаться во мн-ве несущественных состояний экспоненциально убывает.

О доказательстве: частный случай этой леммы был рассмотрен в задачах 4 и 5 листочка 4 (там $E = \{1\}$ и $E = \{1, 2\}$ соответственно). В общем случае доказательство следует той же схеме, и я его опускаю.

Опр. 8 **Периодом** существенного состояния $i \in E$ наз-ся

$$d(i) := \text{НОД}\{k \geq 1 : \; p_{ii}^{(k)} > 0\}.$$

Для несущественных состояний $i \notin E$ период не определён, потому что мы можем иметь $p_{ii}^{(k)} = 0 \;\; \forall k \geq 1$. Даже если $p_{ii}^{(k)} > 0$ для нек-то $k \geq 1$, рано или поздно мы перестанем возвращаться в i, согласно лемме 7, поэтому определять период не имеет смысла.

В **примере 4** $\quad d(5) = d(6) = 2, \quad d(7) = d(8) = 1.$

$p_{55}^{(2k)} > 0 \;\; \forall k \geq 1,$

$p_{55}^{(2k+1)} = 0,$

аналогично с $p_{66}^{(n)}$.

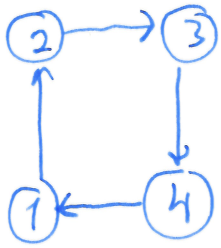
$p_{77}^{(1)} > 0$

$p_{88}^{(2)}, \; p_{88}^{(3)} > 0.$

Для состояний 1, 2, 3, 4 период не определён, так как они несущественные.

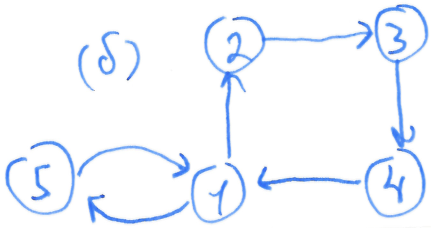
Пример 9:

(а)



период всех состояний равен 4.

(б)



период всех состояний равен 2.

Лемма 10. Если состояния $i \leftrightarrow j$, то $d(i)=d(j)$.

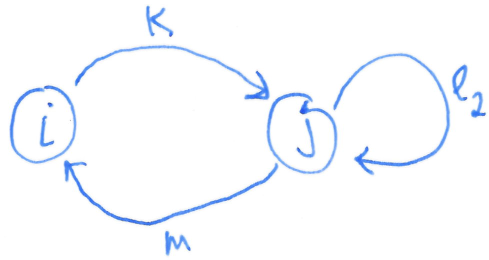
То есть, период одинаков для всех элементов класса сообщаемости.

Это позволяет определить период минимального класса сообщаемости как период любого его элемента.

Д-во: Пусть $p_{ij}^{(k)}>0$, $p_{ji}^{(m)}>0$. Тогда $p_{ii}^{(l_1)}>0$,

где $l_1 := k+m$.

Пусть также $p_{jj}^{(l_2)}>0$.



Тогда $p_{ii}^{(l_1+l_2)}>0$.

Значит, $l_1 \vdots d(i)$ и $l_1+l_2 \vdots d(i)$, а следовательно $l_2 \vdots d(i)$, и это верно $\forall\, l_2$, такого что $p_{jj}^{(l_2)}>0$. Значит, $d(i)\le d(j)$,

так как $d(j)$ — наибольший общий делитель таких l_2.

Меняя местами i и j находим, что $d(j)\le d(i)$,

а значит $d(i)=d(j)$. ∎

Опр. 11 Минимальный класс сообщаемости наз-ся *апериодическим*, если его период равен 1.

Опр 12 МЦ наз-ся неприводимой (irreducible), если она имеет единственный класс сообщаемости.

Эквивалентно, все её состояния существенны.

Соответственно, неприводимая цепь наз-ся апериодической, если период любого (а значит всех) её состояний равен 1.

Теор 13 (1) Неприводимая апериодическая МЦ экспоненциально перемешивает.

(2) Неприводимая МЦ с периодом > 1 не перемешивает.

Доказательство теоремы основано на следующем результате.

Лемма 14 Неприводимая МЦ апериодична $\Longleftrightarrow$ ее матрица переходных вероятностей s-положительна для некоторого $s > 0$.

Теор. 13 + лемма 14 показывают, что условие s-положительности, которое мы требовали в доказанной ранее теореме о перемешивании, является необходимым и достаточным в случае неприводимой цепи.

Теорема 6.6.

Д-во леммы 14:

Задача 15 Если $m, n \in \mathbb{N}$ таковы, что $НОД(m,n)=1$, то $\exists\, k,\ell \in \mathbb{N}$, для которых $km - \ell n = 1$.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Если $p_{ii} > 0$ $\forall i$, то МЦВ 1-положительная.

Пусть для нек-го i имеем $p_{ii}=0$. Тогда $\exists\, n_1, n_2 \geq 2$, такие что $p_{ii}^{(n_1)}, p_{ii}^{(n_2)} > 0$, и $НОД(n_1, n_2) = 1$ (так как $d(i)=1$).

Тогда $p_{ii}^{(kn_1)} > 0$, $p_{ii}^{(\ell n_2)} > 0$ $\forall\, k, \ell \geq 1$.

Согласно задаче 15, k и ℓ можно выбрать так, чтобы $kn_1 - \ell n_2 = 1$. Обозначим $\tilde{n}_1 = kn_1$, $\tilde{n}_2 = \ell n_2$.

Возьмем произвольное $n \geq 1$ и запишем
$$n = q\tilde{n}_2 + r, \text{ где } 0 \leq r \leq \tilde{n}_2 - 1,\ q = 0, 1, \ldots .$$

Тогда, так как $\tilde{n}_1 - \tilde{n}_2 = 1$,

n достаточно велико, а точнее

$$n = q\tilde{n}_2 + r(\tilde{n}_1 - \tilde{n}_2) = \tilde{n}_2(q-r) + r\tilde{n}_1.$$

Если $n \geq n_0(i)$, где $n_0(i) = (\tilde{n}_2)^2$, то $q \geq \tilde{n}_2$, а значит $q - r > 0$. Следовательно,

$$p_{ii}^{(n)} \geq p_{ii}^{(\tilde{n}_2(q-r))}\, p_{ii}^{(r\tilde{n}_1)} > 0, \text{ так как } p_{ii}^{(\tilde{n}_1)}, p_{ii}^{(\tilde{n}_2)} > 0.$$

Это опять следует из Колмогорова-Чепмена

Выбирая $s = \max\limits_{i \in X} n_0(i)$, видим, что МЦВ s-положительная.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Пусть МЦВ s-положительна. Легко видеть, что тогда она k-положительна $\forall\, k \geq s$. В частности, $p_{ii}^{(k)} > 0$ $\forall\, k \geq s$. Значит, $d(i) = 1$.

$\blacksquare$

Д-во Теор. 13 (1) немедленно следует из леммы 14 и теоремы 6.6 о перемешивании.

(2) Пусть $d(i) = d > 1$ $\forall i \in X$. Тогда если $k \notin md$, $m \in \mathbb{N}$, то $p_{ii}^{(k)} = 0$. Если бы МЦ перемешивала, то $p_{ii}^{(k)} \xrightarrow[k\to\infty]{} \pi_i$, где π – стационарное состояние цепи, согласно предложению 6.5. А значит, $\pi_i = 0$ $\forall i$. Это невозможно, так как $\sum_{i\in X} \pi_i = 1$.

▨

Теор. 16 Марковская цепь (однородная, с конечным числом состояний) перемешивает $\Longleftrightarrow$ она имеет единственный минимальный класс сообщаемости, и он апериодический.

Более того, в этом случае перемешивание экспоненциально.

В частности, мы видим, что перемешивание для цепей с конечным числом состояний может быть только экспоненциальным.

Д-во теоремы 16 $\boxed{\Rightarrow}$ • допустим, что МЦ имеет 2 минимальных класса сообщаемости, X_1 и X_2. Тогда если $p^{(0)}\big|_{X_1^c} = 0$, где $X_1^c = X \setminus X_1$, то $p^{(n)}\big|_{X_1^c} = 0$ $\forall n$, так как из минимального класса сообщаемости невозможно выйти.

Аналогично, если $p^{(0)}\big|_{X_2^c} = 0$, то $p^{(n)}\big|_{X_2^c} = 0$ $\forall n$.

Значит, сходимость $p^{(n)} \xrightarrow{n\to\infty} \pi$ с одним и тем же π для всех $p^{(0)}$ невозможна,

- допустим, что МЦ имеет единственный минимальный класс сообщаемости, но тот не является апериодическим. Тогда, рассуждая как при д-ве пункта (2) теоремы 13 видим, что перемешивание невозможно.

⇐ Пусть МЦ имеет единственный минимальный класс сообщаемости, и он апериодический. Тогда схема д-ва такова:

- согласно лемме 7 (в) вер-ть не войти во мн-во E, которое и составляет единственный минимальный класс сообщаемости, экспоненциально убывает с ростом n.

- стартуя из E, можно забыть про остальную цепь, так как из E невозможно выйти. Получаем неприводимую апериодическую МЦ с мн-вом состояний E. По теореме 13 она экспоненциально перемешивает.

Упражнение 17 Проведите строгое доказательство по предложенной схеме.

$\blacksquare$