Дифференциальные уравнения 2023

Письменный экзамен

Демонстрационный вариант

На экзамен отводится 120 минут. На экзамене не разрешается пользоваться конспектами, книгами, электронными устройствами, помощью других лиц.

Из двух задач, разделёнными словом «ИЛИ» (их номера отличаются штрихом), в сумме баллов учитывается только одна.

Ориентировочная шкала оценивания: для получения оценки «удовлетворительно» нужно набрать около 10 баллов, «хорошо» — 14 баллов, «отлично» — 20 баллов. На самом экзамене критерии оценивания и распределение баллов по задачам могут несколько отличаться.

Задача 1 (4). Выполняется ли теорема единственности для решений уравнения

$$y' = \begin{cases} y \ln |y|, & y \neq 0 \\ 0, & y = 0? \end{cases}$$

Начертите приближённо интегральные кривые этого уравнения.

Задача 2 (4). Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

а) Найдите экспоненту e^A этой матрицы.
б) Опишите геометрически действие линейного оператора e^A и нарисуйте образ квадрата $[0, e] \times [0, e]$ под действием этого оператора.

Задача 3 (5). Найдите производную по начальным условиям нулевого решения для системы

$$\dot{x} = \operatorname{tg}(x - y), \quad \dot{y} = \ln(1 - x - y).$$

Задача 4 (5). Найдите неподвижные точки отображения $F \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, где

$$F(x, y) = \left(x + \frac{1}{5} \sin(x + y), y + \frac{1}{5} \sin(x - y) \right).$$

Каждую из этих точек исследуйте на устойчивость.

Задача 5 (6). Рассмотрим уравнение

$$x^{(4)} - 5\ddot{x} + 4x = \sin \omega t.$$

Нарисовать график амплитуды периодического решения этого уравнения для тех значений ω, для которых оно существует и единственно.

ИЛИ

Задача 5$'$ (4). Решите уравнение

$$y'' + 4y = 2 \operatorname{tg} x.$$

Задача 6 (6)**.** Нарисовать фазовый портрет системы

$$\dot{r} = r(2-r)^2, \quad \varphi = 1,$$

указать её предельные циклы и найти их мультипликаторы.

ИЛИ

Задача 6′ (4)**.** Найдите все значения параметров $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, для которых форма в левой части уравнения

$$y^\alpha \sin^2 x\, dx + y\left(x + \frac{1}{2}\sin(\beta x)\right) dy = 0$$

является точной. Решите уравнение при этих значениях (α, β).