Семинар 11.

Задача 1. Пусть C – коника по Штейнеру на проективной плоскости $\mathbb{P}^2$. Мы знаем, что такое двойное отношение 4 точек на конике C. *Проективным преобразованием коники* C назовем такое биективное отображение коники C на себя, при котором сохраняются двойные отношения. Возьмем точку S в $\mathbb{P}^2$, не лежащую на конике C и рассмотрим преобразование $I_S : C \to C$ коники C, отображающее точку $X \in C$ в точку $Y \in C$ такую, что прямая XY проходит через S. Преобразование I_S, очевидно, является инволюцией. Докажите, что эта инволюция I_S является проективным преобразованием коники C.

Задача 2. Докажите, что всякая проективная инволюция на конике C имеет вид I_S, где S – точка в $\mathbb{P}^2$, не лежащая на конике C.

Задача 3. Найдите необходимое и достаточное условие того, что две инволюции I_S и I_T на конике C коммутируют между собой, то есть $I_S \circ I_T = I_T \circ I_S$. Покажите, что в этом случае их композиция также является инволюцией на C.

Задача 4. Покажите, что если три различные точки S, T, U, не лежащие на конике C, коллинеарны, то композиция инволюций I_S, I_T и I_U в любом порядке является инволюцией. Проверьте, что верно обратное утверждение.