Семинарский листок 8
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ-I
Выпуклые функции, старшие производные, формула Тейлора, эскизы графиков функций и кривых

1. *(Преобразование Лежандра)* Пусть f — гладкая выпуклая функция, l_p — прямая, заданная уравнением $y = px$. Преобразованием Лежандра функции f называется функция

$$L(p) = \max_x \{px - f(x)\}.$$

1) Пусть (x_0, y_0) — точка, в которой прямая параллельная прямой l_p касается графика функции. Докажите, что при фиксированном p точка касания x_0 будет корнем уравнения $p = f'(x_0)$.
2) Вычислите преобразование Лежандра функций $x^2, e^x, \frac{x^\alpha}{\alpha}, \alpha \neq 0$.
3) Докажите неравенство Юнга

$$px \leqslant \frac{x^\alpha}{\alpha} + \frac{p^\beta}{\beta}.$$

где $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$, $x, p \geqslant 0$, $\alpha, \beta > 1$.
4) Докажите, что преобразование Лежандра гладкой выпуклой функции есть гладкая выпуклая функция.
5) Докажите, что преобразование Лежандра инволютивно, т.е. дважды применённое к исходной гладкой выпуклой функции f преобразование Лежандра, даёт саму функцию f.
6) Существует ли функция $f(x)$, такая что, ее преобразованием Лежандра будет функция $f(p)$? Единственна ли такая функция?

2. Пусть функция f выпукла на некотором интервале (a, b). Докажите, что она удовлетворяет на любом меньшем отрезке $\Delta = [c, d] \subset (a, b)$ условию Липшица.

3. *(Неравенство Йенсена).* Пусть функция $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ выпуклая, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \geqslant 0, \sum_{k=1}^n \alpha_k = 1$, и $x_k \in (a, b)$. Докажите, что

$$f(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n) \leqslant \alpha_1 f(x_1) + \ldots + \alpha_n f(x_n).$$

4. Найти старшие производные

$$y = \sin x,\ y^{(n)} = ?, \quad y = x^2 e^{2x},\ y^{(20)} = ?$$

5. Разложить функции в ряд Тейлора в нуле с остаточным членом в форме Пеано

$$1)\ \sin(\sin x) \text{ до } x^6, \quad 2)\ \frac{1 + x + x^2}{1 - x + x^2} \text{ до } x^4, 3)\ \sqrt{1 - \sin x} \text{ до } x^3.$$

6. 1) Вычислите $\sin(1/2)$ с точностью до 10^{-3}.
2) Вычислите $\sqrt{1{,}01}$ с точностью до 10^{-4}.

Определение. *Прямая $y = kx + b$ называется асимптотой графика функции f при $x \to +\infty$, если $\lim_{x \to +\infty}(f(x) - kx - b) = 0$. Аналогично определяется асимптота при $x \to -\infty$.*

7. Докажите, что график f имеет асимптоту $y = kx + b$ при $x \to +\infty$ в точности тогда, когда существуют пределы

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx) = b.$$

8. Пусть существует конечный предел $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k$. Верно ли, что f имеет асимптоту?

9. Сделайте эскизы графиков функций

$$1)\ y = \frac{x^2}{x-1}, \quad 2)\ y = \frac{e^{2x+2}}{2x+2}, \quad 3)\ y = xe^{-x^2}.$$

10. Сделайте эскизы графиков параметрически заданных кривых

$$1)\ x(t) = \frac{t^2}{t-1}, y(t) = \frac{t^3}{t-1}, \quad 2)\ x(t) = 1-t^2, y(t) = t(1-t^2).$$

11. Сделайте эскизы графиков кривых заданных неявно

$$1)\ x^3 + y^3 = 3xy, \quad 2)\ x^2 - y^3 = 0.$$

Памятка

Построение эскиза графика функции состоит из нескольких основных этапов.

1. Отыскание ОДЗ и построение приблизительного эскиза, включая вертикальные асимптоты.

2. Отыскание характерных точек на графике, корректировка эскиза, монотонность и выпуклость.

3. Построение невертикальных асимптот.

Вертикальная асимптота всегда возникает в ситуации, когда функция f определена при $x > x_0$ или при $x < x_0$. причём при $x \to x_0 + 0$ или при $x \to x_0 - 0$ справедливо либо что $f(x) \to +\infty$, либо что $f(x) \to -\infty$. Такая ситуация возникает при делении на 0 и при построении графика функции «с логарифмами».

При построении эскиза графика естественно использовать общие свойства функции: чётность-нечётность, периодичность.

Характерные точки. Точки пересечения с осями координат. Иногда это сделать не удаётся, уравнения не решаются, соответственно, некоторые точки считаем приблизительно.

Вычисляем производные и находим критические точки. Вычисляем вторую производную (если не сверхгромоздко) и смотрим тип критической точки.

Смотрим на знак производной между критическими точками, определяем промежутки монотонности.

Смотрим на знак второй производной между точками перегиба, определяем промежутки выпуклости и вогнутости.

Построение эскизов графиков параметрически заданных кривых.

Пусть заданы 2 функции $x, y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (непрерывные, дифференцируемые). Они задают на плоскости кривую: каждому значению t аргумента соответствует точка плоскости $(x(t), y(t))$.

Как изобразить кривую по имеющимся формулам $x(t), y(t)$? Это вопрос сложный.

Одна из теоретических возможностей такая. Разбиваем множество допустимых значений переменной t на промежутки строгой монотонности (если это можно сделать, естественно) функции $x(t)$. Потом рассмотреть обратную к $x(t)$ функцию $t(x)$. Теперь на множестве значений функции $x(t)$ можно построить график функции $y(t(x))$, это будет кусок исходной кривой.

Естественно, можно выражать t через y и строить график функции $x(t(y))$.

Однако практически, в явном виде, выписать функцию $t(x)$ либо не возможно, либо очень сложно и громоздко.

Правильно (по крайней мере в тех задачах, которые вам будут предлагаться на уроках) действовать обычным путём — как при построении графиков функций: эскиз, характерные точки, промежутки монотонности.