Геометрическое введение в алгебраическую геометрию. Осень 2023г

Решения этих задач будут обсуждаться на следующем занятии. Внятно записанные (а лучше затеханные) решения можно присылать на почту alggem23@gmail.com, желательно до 24:00 субботы перед следующим занятием.

Задания с 10 занятия.

(1) На занятии мы доказали, что из точки вне плоской кубики к ней можно провести 6 касательных. Подберите вещественную кубику вида $y^2 = x(x-1)(x-c)$ и точку вне ее так, чтобы все эти 6 касательных можно было увидеть на эскизе графика.

(2) Покажите, что оператор поляризации $D_a = \sum_0^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ инвариантен относительно проективных замен координат $(x_0 : \ldots : x_n) \in \mathbb{P}^n$.

(3) а) Пусть X — кубическая гиперповерхность в $\mathbb{P}^n$, точка $B \in X$ неособа на X, l — прямая, проходящая через точку A и пересекающая кубику X в точках B, C и D и квадрику $P_A X$ в точках A и B. Докажите, что если прямая l не является общей касательной к X и ее поляре $P_A X$ (на занятии объяснялось, почему у них в точке A должна быть общая касательная), то либо $A = C = D$ (т.е. прямая l касается кубики X в точке пересечения ее с ее полярой), либо же точки A, B, C и D все различны, и тогда пара точек A и B гармонически делит пару точек C и D (т.е. двойное отношение $(A, B, C, D) = -1$).

б) Подсказка к предыдущему пункту. Сведите задачу к случаю кубики в $\mathbb{P}^1$, показав, что взятие поляры перестановочно с ограничением на подпространство: если X — гиперповерхность в $\mathbb{P}^n$, заданная однородным уравнением $F = 0$, имеется подпространство $\mathbb{P}^m \subset \mathbb{P}^n$, и $Y = X \cap \mathbb{P}^m$ (это гиперповерхность в $\mathbb{P}^m$, уравнением которой является ограничение формы F на $\mathbb{P}^m$), и точка $A \in \mathbb{P}^m$, то $P_A Y = P_A X \cap \mathbb{P}^m$.

(4) Пусть X — гиперповерхность в $\mathbb{P}^n$, заданная однородным уравнением $F = 0$ степени d, точка $B \in X$ неособа на X, и прямая AB касается X в точке B более, чем двукратно (т.е. ограничение формы F на эту прямую имеет в точке B корень кратности более двух). Докажите, что тогда прямая AB содержится в полярной квадрике $P_{B^{d-2}}X$.

(5) Пусть B — неособая точка перегиба кривой $X \subset \mathbb{P}^2$ степени d. Покажите, что полярная коника $P_{B^{d-2}}X$ распадается в объединение двух различных прямых $P_{B^{d-2}}X = \mathbb{T}_B X \cup l$, причем $\mathbb{T}_B X \cap l \neq B$. (Неособая точка кривой называется точкой перегиба, если ограничение уравнения этой кривой на касательную имеет в точке касания корень кратности более двух.)