15 Лекция 15. Теорема о гладкости

Эта лекция близко следует учебнику. В нужных местах на него даются ссылки.

1. Производная решения по начальному условию.

Эвристический вывод уравнения в вариациях по начальному условию.

Учебник раздел 7.2.2.

2. Теорема о гладкости.

Формулировка и доказательство.

Учебник разделы 7.2.3, 7.2.4..

16 Лекция 16. Приложения теоремы о гладкости

1. Фазовые потоки (абстрактное определение).

2. Фазовый поток, заданный автономным ДУ

3. Генератор. Теорема о генераторе.

Учебник, стр 60 - 65.

4. Искажение фазового объема.

Учебник раздел 7.2.7.

17 Лекция 17. Приложения теоремы о гладкости (продолжение)

1. Теорема о выпрямлении.

Учебник раздел 7.3, начало.

2. Производная решения по параметру.

Изложение ниже подробнее, чем в учебнике.

Рассмотрим систему, заувисящую от параметра $\varepsilon \in \mathbb{R}^k$:

$$\dot{x} = f(t, x, \varepsilon). \tag{1}$$

Пусть $\varphi(t, x, \varepsilon)$ - решение уравнения (1) с начальным условием $\varphi(t_0, x, \varepsilon) = (x, \varepsilon)$. Продифференцируем по ε тождество

$$\dot{\varphi}(t, x, \varepsilon) = f(t, \varphi(t, x, \varepsilon), \varepsilon).$$

Введя обозначения:

$$Y = \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon},\ A(t, x, \varepsilon) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, \varphi(t, x, \varepsilon), \varepsilon),$$

$$B(t, x, \varepsilon) = \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(t, \varphi(t, x, \varepsilon), \varepsilon),$$

получим:

$$\dot{Y} = AY + B.$$

Это эвристический вывод уравнения в вариациях по параметру; мы не обосновываем законность выкладок.

Это обоснование дается так же, как и для уравнения в вариациях по начальному условию. Более того, первое выводится из второго (уравнение в вариациях по параметру - из уранения в вариациях по начальному условию). А именно, мы превращаем семейство (1) в одно уравнение, включив параметр в число переменных

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, \varepsilon) \\ \dot{\varepsilon} = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Напишем для этой системы расширенную систему, включив операторно-значную переменную - производную ао начальному условию системы (2). Запишем эту производную. Правая часть системы

$$\begin{pmatrix} f(t, x, \varepsilon) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Точка фазового пространства (x, ε). Производная решения по x, ε:

$$\frac{\partial(\varphi, \varepsilon)}{\partial(x, \varepsilon)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} & \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varepsilon} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & Y \\ 0 & E \end{pmatrix}.$$

Производная правой части:

$$\frac{\partial(f, 0)}{\partial(x, \varepsilon)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Уравнение в вариациях по начальному условию для системы (2):

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} X & Y \\ 0 & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & Y \\ 0 & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AX & AY + B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Эта система содержит как уравнение в вариациях по начальному условию для (1):

$$\dot{X} = AX,$$

так и уравнение в вариациях по параметру:

$$\dot{Y} = AY + B.$$

Соотношение (3) следует из теоремы о гладкости, примененной к системе (2).

3. Начала теории устойчмвости: определения и формулировки теорем.