

ПРИКЛАДНЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА – 2023  
ЛИСТОК 8

1. Докажите тождество

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 t} = \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 / t}.$$

2. Найдите  $\det'(-\partial_x^2)$  на отрезке  $[0, L]$  с граничными условиями Неймана  $\partial_x u|_{x=0} = \partial_x u|_{x=L} = 0$ . (Штрих у детерминанта означает, что в произведении собственных значений надо выкинуть нулевое собственное значение.)

3. Найдите  $\det(-\Delta)$  для круга радиуса  $R$ .

4. Докажите, что выражение для детерминанта оператора Лапласа в области  $D$

$$\log \det(-\Delta) = -\frac{1}{12\pi} \oint_{|w|=1} (\phi \partial_n \phi + 2\phi) |dw| + \text{const}$$

с точностью до аддитивной константы не зависит от нормировки конформного отображения  $z(w)$  единичного круга на область  $D$  ( $\phi(w) = \log |z'(w)|$ ).

5. Докажите, что

$$\oint_{|w|=1} \phi(w) |dw| = 2\pi \log r_0,$$

где  $\phi(w) = \log |z'(w)|$ ,  $z(w)$  – конформное отображение единичного диска на область  $D$  такое, что  $z(0) = 0 \in D$  и  $r_0 = z'(0) > 0$  – конформный радиус области  $D$ .

6. Докажите, что кривизна  $\kappa(z)$  кривой  $\Gamma = \partial D$  в точке  $z \in \Gamma$ , где  $D$  – компактная односвязная область в комплексной плоскости, выражается через конформное отображение  $w(z)$  области  $D$  на единичный круг формулой

$$\kappa(z) = \partial_n \log \left| \frac{w(z)}{w'(z)} \right|, \quad z \in \Gamma.$$

*Напоминание:* кривизна, по определению, равна  $\kappa = d\theta/ds$ , где  $\theta$  – угол, образованный касательным вектором к кривой и вещественной осью,  $ds$  – дифференциал дуги кривой.

*Указание:* Получите сначала выражение для единичного касательного вектора к кривой в терминах  $w(z)$ .