

ПРИКЛАДНЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА – 2023
ЛИСТОК 9

1. Проверьте прямым вычислением, что обобщенные функции

$$G_1(x, t) = \frac{1}{2c} \theta(ct - |x|),$$
$$G_2(\vec{x}, t) = \frac{\theta(ct - |\vec{x}|)}{2\pi c \sqrt{c^2 t^2 - |\vec{x}|^2}},$$
$$G_3(\vec{x}, t) = \frac{\theta(t)}{2\pi c} \delta(c^2 t^2 - |\vec{x}|^2)$$

удовлетворяют уравнениям

$$(\partial_t^2 - c^2 \Delta_d) G_d(\vec{x}, t) = \delta(t) \delta(\vec{x}), \quad d = 1, 2, 3,$$

где Δ_d – оператор Лапласа в \mathbb{R}^d .

2. Решите задачу Коши на полупрямой $x \geq 0$ для уравнения $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ с условиями $u(0, t) = 0$, $u(x, 0) = \varphi(x)$, $u_t(x, 0) = \psi(x)$ ($\varphi(0) = \psi(0) = 0$).

3. Пусть $u(\vec{x}, t)$ – функция, которая при $t > 0$ удовлетворяет уравнению $u_{tt} = c^2 \Delta$, $u(\vec{x}, 0) = u_0(\vec{x})$, $u_t(\vec{x}, 0) = u_1(\vec{x})$ и $u(x, t) = 0$ при $t < 0$. Докажите, что так определенная функция удовлетворяет уравнению

$$(\partial_t^2 - c^2 \Delta) u(\vec{x}, t) = u_0(\vec{x}) \delta'(t) + u_1(\vec{x}) \delta(t).$$

4. Найдите сферически симметричное общее решение уравнения $u_{tt} = c^2 \Delta u$ в трехмерном пространстве.

5. а) Покажите, что уравнение Лиувилля $u_{tt} - u_{xx} = e^u$ имеет решение

$$u(x, t) = \log \frac{8f'(x+t)g'(x-t)}{(f(x+t) - g(x-t))^2},$$

где f, g – произвольные (трижды дифференцируемые) функции такие, что $f'(x) > 0$, $g'(x) > 0$.

б) Покажите, что уравнение sine-Гордон $u_{tt} - u_{xx} = -g \sin u$ ($g > 0$) имеет решение

$$u(x, t) = 4 \operatorname{arctg} \exp\left(\sqrt{g} \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}}\right),$$

где v – произвольный параметр такой, что $|v| < 1$.

6. Найдите решение уравнения $u_{tt} = c^2 u_{xx} + f(x, t)$ при

$$f(x, t) = \frac{e^{-t}}{x^2 + a^2}$$

на прямой такое, что $u(x, 0) = 0$.