

# Прикладные методы анализа – 2023

- 1 Интегралы типа Коши и их граничные значения.  
Формулы Сохоцкого-Племеля
- 2 Обобщенные функции
- 3 Гармонические функции и краевые задачи
- 4 Теория потенциала
- 5 Цилиндрические и сферические функции
- 6 Уравнение теплопроводности
- 7 Некоторые задачи спектральной геометрии
- 8 Волновое уравнение

Волновое уравнение имеет вид

$$u_{tt} = c^2 \Delta u.$$

Оно в линейном приближении описывает распространение различных колебаний и волн в среде: например, колебания струн музыкальных инструментов, волны разрежения и сжатия в твердом теле, электромагнитные и гравитационные волны. Константа  $c$  имеет смысл скорости распространения волн.

**Вывод волнового уравнения.** Приведем вывод волнового уравнения, ограничившись случаем одного измерения. Рассмотрим малые поперечные колебания натянутой струны. Продольную координату обозначим через  $x$ , а смещение в поперечном направлении через  $u = u(x)$  (будем считать, что смещение происходит в одной плоскости), причем  $u$  предполагается малым по сравнению с длиной струны, и  $u_x \ll 1$ ,

так что везде будем пренебрегать величиной  $u_x^2$  в сравнении с  $u_x$ . Заметим, что в этом приближении длина любого участка струны от  $x_1$  до  $x_2$   $\ell(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + u_x^2} dx$  остается неизменной при деформации. Рассмотрим малый участок  $\delta S$  струны от  $x$  до  $x + \delta x$ . В точке  $x$  смещение равно  $u(x)$ , в точке  $x + \delta x$  оно равно  $u(x + \delta x)$ ; малый угол  $\alpha$  наклона касательной к струне в точке  $x$  равен  $\alpha(x) = u_x(x)$ , а в точке  $x + \delta x$  он равен  $\alpha(x + \delta x) = u_x(x + \delta x) = \alpha(x) + u_{xx}(x)\delta x$ . Поскольку длина любого участка струны остается в нашем приближении неизменной при деформации, натяжение струны  $T$  по закону Гука одинаково по всей длине. Тогда результирующая сила, действующая на участок  $\delta S$  в продольном направлении, равна с нашей точностью нулю, поскольку разность  $T \cos \alpha(x + \delta x) - T \cos \alpha(x)$  имеет порядок  $u_x^2$ , которым мы пренебрегаем. В поперечном направлении на участок  $\delta S$  действует сила

$$\begin{aligned} T \sin \alpha(x + \delta x) - T \sin \alpha(x) &= T(\alpha(x + \delta x) - \alpha(x)) \\ &= T(u_x(x + \delta x) - u_x(x)) = Tu_{xx}\delta x. \end{aligned}$$

Масса участка  $\delta S$  равна  $\rho\delta x$ , где  $\rho$  – плотность струны. Скорость этого участка в поперечном направлении равна  $u_t$ , ускорение  $u_{tt}$ . Поэтому по второму закону Ньютона имеем

$$\rho u_{tt}\delta x = Tu_{xx}\delta x,$$

т.е.

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad c^2 = \frac{T}{\rho}.$$

**Распространение волн на прямой.** Рассмотрим волновое уравнение на прямой

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}.$$

Перейдя к переменным  $\xi = x + ct$ ,  $\eta = x - ct$ , запишем уравнение в виде  $u_{\xi\eta} = 0$ , откуда следует, что общее решение имеет вид

$$u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct),$$

где  $f, g$  – произвольные (дважды дифференцируемые) функции. Тем самым решение представляет собой суперпозицию возмущения с профилем  $f(x)$ , движущегося со скоростью  $c$  направо и возмущения с профилем  $g(x)$ , движущегося со скоростью  $c$  налево.

Воспользуемся этим общим решением, чтобы решить задачу Коши с начальными данными

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x).$$

Тогда должно быть

$$f(x) + g(x) = \varphi(x), \quad c(g'(x) - f'(x)) = \psi(x).$$

или

$$\begin{cases} f(x) + g(x) = \varphi(x), \\ f(x) - g(x) = -\frac{1}{c} \int_{x_0}^x \psi(t) dt + C \end{cases}$$

Отсюда находим

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(\varphi(x - ct) + \varphi(x + ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(t') dt'.$$

Эта формула называется формулой Даламбера.

В частности, если начальное возмущение было локализовано вблизи точки  $x = 0$ , т.е. если в пределе мы имеем начальные условия  $u(x, 0) = a\delta(x)$ ,  $u_t(x, 0) = b\delta(x)$ , формула Даламбера дает:

$$u(x, t) = \frac{a}{2}(\delta(x - ct) + \delta(x + ct)) + \frac{b}{2c}(\theta(x + ct) - \theta(x - ct)).$$

Отсюда мы видим, что при  $b \neq 0$  возмущение в момент времени  $t$  отлично от нуля на всем отрезке  $|x| \leq ct$  и равно нулю вне этого отрезка. Если же  $b = 0$ , возмущение локализовано в точках  $\pm ct$ , а остальные точки находятся в покое. Если начальное возмущение  $u(x, 0) = \varphi(x)$  было локализовано на каком-то конечном отрезке, а  $u_t(x, 0) = 0$ , от него в обе стороны со скоростью  $c$  будут распространяться локализованные возмущения  $\frac{1}{2}\varphi(x \pm ct)$ , сохраняя свою форму, а остальные точки прямой будут в покое. Иными словами, обе волны (левая и правая) имеют в этом случае четко очерченные передний и задний фронты. Это простейший пример справедливости принципа Гюйгенса, о котором будет подробнее рассказано ниже в связи с задачей о распространении волн на плоскости и в пространстве. Если же  $u_t(x, 0) \neq 0$ , принцип Гюйгенса нарушается – волна имеет передний фронт, но не имеет заднего.

Поучительно вывести формулу Даламбера другим способом, который хотя в данном случае и выглядит сложнее, но в отличие от использованных выше элементарных соображений обобщается на старшие размерности. Этот способ заключается в том, чтобы сначала найти функцию Грина волнового уравнения, т.е. функцию  $G_1(x, t)$  такую, что

$$(\partial_t^2 - c^2 \partial_x^2)G_1(x, t) = \delta(t)\delta(x)$$

и  $G_1(x, t) = 0$  при  $t < 0$ . Отметим, что функция Грина не единственна – к ней можно прибавить любое решение однородного уравнения. Очевидно, знание функции Грина позволяет найти решение неоднородного уравнения  $u_{tt} = c^2 u_{xx} + f(x, t)$ , с любой функцией  $f$  такой, что  $f(x, t) = 0$  при  $t < 0$ , по формуле

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} dy G_1(x - y, t - \tau) f(y, \tau), \quad t > 0.$$

Потом мы покажем, как задачу Коши можно свести к решению неоднородного уравнения. Решить уравнение для функции Грина можно преобразованием Фурье по  $x$ , перейдя к Фурье-образу

$$G_\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_1(x, t) e^{ix\xi} dx.$$

Обратное преобразование имеет вид

$$G_1(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_\xi(t) e^{-ix\xi} d\xi.$$

Фурье-образ  $\delta$ -функции – функция от  $\xi$ , равная 1 на всей прямой. Легко видеть, что уравнение на функцию Грина после преобразования Фурье принимает вид

$$\partial_t^2 G_\xi(t) + (c\xi)^2 G_\xi(t) = \delta(t).$$

Это обыкновенное дифференциальное уравнение по  $t$ . Его легко решить. Нетрудно убедиться, что решение таково:

$$G_\xi(t) = \theta(t) \frac{\sin(c\xi t)}{c\xi}.$$

Тогда для функции Грина получаем:

$$G_1(x, t) = \frac{\theta(t)}{2\pi c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(c\xi t)}{c\xi} e^{-ix\xi} d\xi.$$

Взяв этот интеграл (это хорошая задача по теории функций комплексного переменного), находим:

$$G_1(x, t) = \frac{\theta(ct - |x|)}{2c}.$$

Возьмем в качестве функции  $f(x, t)$  в неоднородном уравнении обобщенную функцию

$$f(x, t) = u_0(x)\delta'(t) + u_1(x)\delta(t)$$

и выпишем решение, пользуясь найденной нами функцией Грина:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2c} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} dy \theta(ct - \tau - |x - y|) (u_0(y)\delta'(\tau) + u_1(y)\delta(\tau)). \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dy \delta(ct - |x - y|) u_0(y) + \frac{1}{2c} \int_{-\infty}^{\infty} dy \theta(ct - |x - y|) u_1(y) \\ &= \frac{1}{2} (u_0(x + ct) + u_0(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(y) dy. \end{aligned}$$

Мы получили формулу Даламбера для решения с начальными условиями  $u(x, 0) = u_0(x)$ ,  $u_t(x, 0) = u_1(x)$ . Видим, что задача для неоднородного уравнения с неоднородностью указанного вида, сосредоточенной в точке  $t = 0$ , эквивалентна задаче Коши для однородного уравнения. В этом можно убедиться и из самого определения функции Грина, не пользуясь ее явным видом. Действительно, мы имеем решение

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_1(x - y, t) u_1(y) dy + \int_{-\infty}^{\infty} \partial_t G_1(x - y, t) u_0(y) dy.$$

Проинтегрировав уравнение  $(\partial_t^2 - c^2 \partial_x^2) G_1(x, t) = \delta(t) \delta(x)$  по  $t$  в пределах от  $-t$  до  $t$  с учетом того, что  $G_1(x, t) = 0$  при  $t < 0$ , и устремив  $t \rightarrow +0$ , найдем

$$\lim_{t \rightarrow +0} \partial_t G_1(x, t) = \delta(x), \quad \lim_{t \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} G_1(x - y, t) u(y) dy = 0$$

для любой непрерывной функции  $u(y)$ . Тогда из формулы для  $u(x, t)$  сразу получаем

$$\lim_{t \rightarrow +0} u(x, t) = u_0(x),$$

$$\lim_{t \rightarrow +0} u_t(x, t) = u_1(x) + \lim_{t \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} \partial_t^2 G_1(x - y, t) u_0(y) dy.$$

Заменив в интеграле  $\partial_t^2 G_1(x - y, t)$  на  $c^2 \partial_y^2 G_1(x - y, t)$  и дважды интегрируя по частям, найдем, что предел этого интеграла при  $t \rightarrow +0$  равен нулю, так что  $\lim_{t \rightarrow +0} u_t(x, t) = u_1(x)$ .

Метод функции Грина позволяет также получить формулу для решения неоднородного уравнения  $u_{tt} = c^2 u_{xx} + f(x, t)$ , обобщающую формулу Даламбера:

$$u(x, t) = \frac{1}{2c} \int_0^t d\tau \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} dy f(y, \tau) + \frac{1}{2} (u_0(x+ct) + u_0(x-ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(y) dy.$$

**Распространение волн в пространстве.** Теперь рассмотрим волновое уравнение

$$u_{tt} = c^2 \Delta u$$

в трехмерном пространстве. Найдем функцию Грина  $G_3(\vec{x}, t)$  такую, что

$$(\partial_t^2 - c^2 \Delta) G_3(\vec{x}, t) = \delta(t) \delta(\vec{x})$$

и  $G_3(\vec{x}, t) = 0$  при  $t < 0$ . Трехмерное преобразование Фурье имеет вид

$$G_{\vec{\xi}}(t) = \int_{\mathbb{R}^3} G_3(\vec{x}, t) e^{i(\vec{\xi}, \vec{x})} d^3 x.$$

Фурье-преобразованное уравнение для функции Грина запишется в виде

$$\partial_t^2 G_{\vec{\xi}}(t) + c^2 |\vec{\xi}|^2 G_{\vec{\xi}}(t) = \delta(t).$$

Решение находится точно так же, как в одномерном случае:

$$G_{\vec{\xi}}(t) = \theta(t) \frac{\sin(c|\vec{\xi}|t)}{c|\vec{\xi}|}.$$

Обратное преобразование Фурье дает:

$$G_3(\vec{x}, t) = \frac{\theta(t)}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\sin(c|\vec{\xi}|t)}{c|\vec{\xi}|} e^{-i(\vec{\xi}, \vec{x})} d^3 \xi = \frac{\theta(t)}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\sin(c|\vec{\xi}|t)}{c|\vec{\xi}|} \cos(\vec{\xi}, \vec{x}) d^3 \xi.$$

Направим ось  $z$  вдоль вектора  $\vec{x}$  и перейдем в сферическую систему координат

$$\vec{\xi} = (\rho \sin \theta \cos \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \theta), \quad d^3 \xi = \rho^2 \sin \theta d\rho d\theta d\varphi.$$

Тогда будем иметь интеграл

$$\begin{aligned} G_3(\vec{x}, t) &= \frac{\theta(t)}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\sin(c\rho t)}{c\rho} \cos(\rho|\vec{x}| \cos \theta) d^3 \xi \\ &= \frac{\theta(t)}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \rho^2 d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \frac{\sin(c\rho t)}{c\rho} \cos(\rho|\vec{x}| \cos \theta) \\ &= \frac{2\pi\theta(t)}{2(2\pi)^3 c} \int_{-\infty}^\infty \rho d\rho \sin(c\rho t) \int_{-1}^1 d\tau \cos(\rho|\vec{x}|\tau) \\ &= \frac{\theta(t)}{(2\pi)^2 c|\vec{x}|} \int_{-\infty}^\infty \sin(c\rho t) \sin(\rho|\vec{x}|) d\rho. \end{aligned}$$

Последний интеграл надо понимать в смысле обобщенных функций, руководствуясь тождеством

$$\int_{-\infty}^\infty e^{i\rho x} d\rho = 2\pi\delta(x).$$

Тогда получим

$$G_3(\vec{x}, t) = \frac{\delta(ct - |\vec{x}|)}{4\pi c|\vec{x}|} = \frac{\theta(t)}{2\pi c} \delta(c^2t^2 - |\vec{x}|^2).$$

В отличие от функции Грина на прямой, которая отлична от нуля во всем “объеме”  $|x| \leq ct$ , функция  $G_3(\vec{x}, t)$  есть обобщенная функция, сосредоточенная на поверхности сферы  $|\vec{x}| = ct$  и равная нулю при  $|\vec{x}| < ct$  и  $|\vec{x}| > ct$ .

Как и в одномерном случае, возьмем в качестве функции  $f(\vec{x}, t)$  в неоднородном уравнении  $u_{tt} = c^2\Delta u + f(\vec{x}, t)$  обобщенную функцию  $u_0(\vec{x})\delta'(t) + u_1(\vec{x})\delta(t)$  и выпишем решение, пользуясь найденной функцией Грина:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{\mathbb{R}^3} d^3y G_3(\vec{x} - \vec{y}, t - \tau) (u_0(\vec{y})\delta'(\tau) + u_1(\vec{y})\delta(\tau)) \\ &= \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|\vec{y}-\vec{x}|=ct} dS_y u_1(\vec{y}) + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|\vec{y}-\vec{x}|=ct} dS_y u_0(\vec{y}) \right). \end{aligned}$$

Эта формула называется формулой Кирхгофа. Интегрирование в ней проводится по поверхности сферы радиуса  $ct$  с центром в точке  $\vec{x}$ ,  $dS_y$  – элемент площади этой сферы. Записав  $\vec{y} = \vec{x} + ct\vec{n}$ , где  $\vec{n} = (\sin\theta \cos\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\theta)$  – единичный вектор, можем представить формулу Кирхгофа в несколько более явном виде:

$$u(x, t) = \frac{t}{4\pi} \int_{S^2} d^2\vec{n} u_1(\vec{x} + ct\vec{n}) + \frac{d}{dt} \left( \frac{t}{4\pi} \int_{S^2} d^2\vec{n} u_0(\vec{x} + ct\vec{n}) \right).$$

Здесь интегрирование идет по сфере единичного радиуса  $S^2$  с мерой  $d^2\vec{n} = \sin\theta d\theta d\varphi$ . Легко проверить, что  $u(x, 0) = u_0(x)$ ,  $u_t(x, 0) = u_1(x)$ , так что формула Кирхгофа дает решение задачи Коши.

Применим формулу Кирхгофа в случае, когда начальное возмущение локализовано в малой окрестности начала координат, в пределе точечного возмущения мы возьмем  $u_0(\vec{x}) = a_0\delta(\vec{x})$ ,  $u_1(\vec{x}) = a_1\delta(\vec{x})$ . Интеграл в формуле Кирхгофа мы можем вычислить следующим образом:

$$\int_{S^2} d^2\vec{n} u_i(\vec{x} + ct\vec{n}) = a_i \int \delta(\vec{x} + ct\vec{y}) \delta(|\vec{y}| - 1) d^3y = a_i \frac{\delta(|\vec{x}| - ct)}{c^2t^2},$$

тогда решение запишется в виде

$$u(\vec{x}, t) = a_1 \frac{\delta(|\vec{x}| - ct)}{4\pi c|\vec{x}|} - a_0 \frac{\delta'(|\vec{x}| - ct)}{4\pi|\vec{x}|}.$$

Мы видим, что спустя время  $t$  возмущение локализуется на сфере радиуса  $ct$ . Пусть теперь начальное возмущение отлично от нуля в некоторой ограниченной малой области пространства  $V = V(0)$ . Рассмотрим мгновенную пространственную картину возмущения  $u(\vec{x}, t)$  в момент времени  $t$ . Точки  $\vec{x}$ , находящиеся в возбужденном состоянии, характеризуются тем, что сферы радиуса  $ct$  с центром в точке  $\vec{x}$  пересекают область  $V$ . Это означает, что геометрическое место точек  $V(t)$ , в которых возмущение отлично от нуля в момент времени  $t$ , состоит из точек  $\vec{x}$ , находящихся на сферах радиуса  $ct$  с центрами в точках области  $V(0)$ . Огибающие семейства этих сфер будут границами области  $V(t)$ . Внешняя огибающая является передним фронтом, внутренняя – задним фронтом распространяющейся волны. Таким образом,

локализованное в пространстве начальное возмущение вызывает в каждой точке пространства действие, локализованное во времени с резко очерченными передним и задним фронтами, т.е. имеет место принцип Гюйгенса.

Решение неоднородного уравнения  $u_{tt} = c^2 \Delta u + f(\vec{x}, t)$  с нулевыми начальными условиями дается формулой

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi c^2} \int_{|\vec{x}-\vec{y}| \leq ct} \frac{f(\vec{y}, t - \frac{|\vec{x}-\vec{y}|}{c})}{|\vec{x}-\vec{y}|} d^3 \vec{y}.$$

В физике решения такого типа называют запаздывающими потенциалами.

**Распространение волн на плоскости.** Как ни странно, задача о распространении волн на плоскости сложнее рассмотренной выше задачи в пространстве как с математической, так и с физической точек зрения.

Найдем функцию Грина  $G_2(\vec{x}, t)$  двумерного волнового уравнения:

$$(\partial_t^2 - c^2 \Delta) G_2(\vec{x}, t) = \delta(t) \delta(\vec{x})$$

и  $G_2(\vec{x}, t) = 0$  при  $t < 0$ . Решение методом преобразования Фурье ничем не отличается от трехмерного случая. Фурье-преобразованная функция Грина имеет вид

$$G_{\vec{\xi}}(t) = \theta(t) \frac{\sin(c|\vec{\xi}|t)}{c|\vec{\xi}|},$$

где теперь  $\vec{\xi}$  – двумерный вектор. Обратное преобразование Фурье дает:

$$G_2(\vec{x}, t) = \frac{\theta(t)}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\sin(c|\vec{\xi}|t)}{c|\vec{\xi}|} e^{-i(\vec{\xi}, \vec{x})} d^2 \xi.$$

Направим ось  $x$  вдоль вектора  $\vec{x}$  и проведем вычисление в полярной системе координат  $\vec{\xi} = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)$ ,  $d^2 \xi = \rho d\rho d\varphi$ . Тогда будем иметь интеграл

$$G_2(\vec{x}, t) = \frac{\theta(t)}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\sin(c\rho t)}{c\rho} e^{-i\rho|\vec{x}| \cos \varphi}.$$

Интеграл по  $\varphi$  дает функцию Бесселя

$$J_0(\rho|\vec{x}|) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi e^{-i\rho|\vec{x}| \cos \varphi},$$

так что нам нужно вычислить интеграл

$$G_2(\vec{x}, t) = \frac{\theta(t)}{2\pi c} \int_0^\infty \sin(c\rho t) J_0(\rho|\vec{x}|) d\rho.$$

О том, как вычислять этот и ему подобные интегралы с функциями Бесселя, рассказано в книге [?]. Мы приведем ответ:

$$\int_0^\infty \sin(ax) J_0(bx) dx = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}}, & a > b, \\ 0, & a < b. \end{cases}$$

Пользуясь этим результатом, находим функцию Грина:

$$G_2(\vec{x}, t) = \frac{\theta(ct - |\vec{x}|)}{2\pi c \sqrt{c^2 t^2 - |\vec{x}|^2}}.$$

В отличие от трехмерного случая, функция  $G_2(\vec{x}, t)$  отлична от нуля не только на окружности  $|\vec{x}| = ct$ , но и во всех внутренних точках диска  $|\vec{x}| \leq ct$ .

Как и в предыдущих случаях, возьмем в качестве функции  $f(\vec{x}, t)$  в неоднородном уравнении  $u_{tt} = c^2 \Delta u + f(\vec{x}, t)$  обобщенную функцию  $u_0(\vec{x})\delta'(t) + u_1(\vec{x})\delta(t)$  и выпишем решение, пользуясь найденной функцией Грина:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{\mathbb{R}^2} d^2\vec{y} G_2(\vec{x} - \vec{y}, t - \tau) (u_0(\vec{y})\delta'(\tau) + u_1(\vec{y})\delta(\tau)) \\ &= \frac{1}{2\pi c} \int_{|\vec{x}-\vec{y}| \leq ct} \frac{u_1(\vec{y}) d^2\vec{y}}{\sqrt{c^2 t^2 - |\vec{x} - \vec{y}|^2}} + \frac{1}{2\pi c} \frac{d}{dt} \int_{|\vec{x}-\vec{y}| \leq ct} \frac{u_0(\vec{y}) d^2\vec{y}}{\sqrt{c^2 t^2 - |\vec{x} - \vec{y}|^2}}. \end{aligned}$$

Эта формула называется формулой Пуассона. Интегрирование в ней проводится по внутренности диска радиуса  $ct$  с центром в точке  $\vec{x}$ . Заменяв переменную интегрирования  $\vec{y} \rightarrow \vec{x} + \vec{y}$ , запишем формулу Пуассона в виде

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi c} \int_{|\vec{y}| \leq ct} \frac{u_1(\vec{x} + \vec{y}) d^2\vec{y}}{\sqrt{c^2 t^2 - |\vec{y}|^2}} + \frac{1}{2\pi c} \frac{d}{dt} \int_{|\vec{y}| \leq ct} \frac{u_0(\vec{x} + \vec{y}) d^2\vec{y}}{\sqrt{c^2 t^2 - |\vec{y}|^2}}.$$

Легко проверить, что  $u(x, 0) = u_0(x)$ ,  $u_t(x, 0) = u_1(x)$ , так что формула Пуассона дает решение задачи Коши.

Убедимся, что при распространении волн на плоскости принцип Гюйгенса не имеет места. Пусть начальное возмущение задано в некоторой ограниченной малой области  $S = S(0)$  на плоскости. Рассмотрим изменение состояния  $u(\vec{x}, t)$  в точке  $\vec{x}$ , находящейся вне  $S$ . Значение  $u(\vec{x}, t)$  определяется согласно формуле Пуассона начальными данными в точках  $\vec{y}$ , лежащих в круге радиуса  $ct$  с центром в  $\vec{x}$ . Пусть  $d$  – расстояние от  $\vec{x}$  до ближайшей точки из области  $S$ . Для моментов времени  $t < d/c$  функция  $u(\vec{x}, t) = 0$  – до точки  $\vec{x}$  волна еще не дошла. Если же  $t > d/c$ , то  $u(\vec{x}, t) \neq 0$ , т.е. начиная с момента  $t = d/c$  в точке  $\vec{x}$  возникает возмущение, постепенно убывающее до нуля при  $t \rightarrow \infty$ . В этом явлении последствие заключается главное отличие плоского случая от пространственного. Влияние начальных возмущений, локализованных в пространстве, не локализовано во времени. Картина возмущений на плоскости имеет резко очерченный передний фронт, но не имеет заднего. Принцип Гюйгенса не имеет места. В двумерном мире звук от резкого удара не сходил бы на нет через мгновение, а постепенно затухал бы весьма продолжительное время. Разборчивая речь была бы, вероятно, невозможной.

Отметим, что аналогичный анализ волнового уравнения в произвольном числе измерений приводит к выводу, что принцип Гюйгенса справедлив во всех нечетных размерностях  $d \geq 3$  и не имеет места во всех четных размерностях (а также в одном измерении).

Наконец, выпишем решение неоднородного уравнения  $u_{tt} = c^2 \Delta u + f(\vec{x}, t)$  с нулевыми начальными данными:

$$u(\vec{x}, t) = \frac{1}{2\pi c} \int_0^t \int_{|\vec{y}| \leq c(t-\tau)} \frac{f(\vec{x} + \vec{y}, \tau) d^2\vec{y} d\tau}{\sqrt{c^2(t-\tau)^2 - |\vec{y}|^2}}.$$



Решение неоднородной задачи с ненулевыми начальными данными дается суммой этого выражения и правой части формулы Пуассона.

## Список литературы

- [1] М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат, *Методы теории функций комплексного переменного*, Наука, Москва, 1973.
- [2] Ф.Д. Гахов, *Краевые задачи*, Наука, Москва, 1977.
- [3] И.М. Гельфанд, Г.Е. Шиллов, *Обобщенные функции и действия над ними*, Москва, 1959.
- [4] В.С. Владимиров, *Уравнения математической физики*, Наука, Москва, 1985.
- [5] В.С. Владимиров, В.В. Жаринов, *Уравнения математической физики*, Москва, 2000.
- [6] А.Н. Тихонов, А.А. Самарский, *Уравнения математической физики*, Наука, Москва, 1977.
- [7] P. Wiegmann, A. Zabrodin, *Conformal maps and integrable hierarchies*, Communications in Mathematical Physics, **213** (2000) 523–538.
- [8] В.И. Арнольд, *Лекции об уравнениях с частными производными*, Фазис, Москва, 1999.
- [9] А.Ф. Никифоров, В.Б. Уваров, *Специальные функции математической физики*, Наука, Москва, 1984.
- [10] Я.Б. Зельдович, А.Д. Мышкис, *Элементы математической физики*, Наука, Москва, 1973.
- [11] М. Кас, *Can one hear the shape of a drum?*, American Mathematical Monthly, Volume 73 (1966), Issue 4, Part 2: Papers in Analysis, 1–23.
- [12] Н.Р. McKean, Jr., I.M. Singer, *Curvature and the eigenvalues of the Laplacian*, J. Differential Geom. **1** (1967) 43–69.