Домашнее задание 4
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ-I
Срок сдачи: 20 декабря 23:59 по Москве

Минимум из количества сданных задач и 10 равняется оценке за листок. Для того, чтобы задача была засчитана полностью, нужно сдать все пункты. Звёздочкой помечены задачи повышенной сложности.

1. Найти старшие производные

$$1)\ y = x^2\sin(2x),\ y^{(50)} =?, \quad 2)\ y = (x^3+4x^2+2)e^{2x},\ y^{(10)} =?$$

2. Разложить в ряд Тейлора в нуле

$$1)\ \ln(\cos x) \text{ до } x^4, \quad 2)\ \frac{x}{e^x-1} \text{ до } x^4.$$

3. Пусть функция f трижды дифференцируема на прямой. Верно ли, что найдётся интервал на котором она выпукла или вогнута?

4*. Пусть функция f дважды дифференцируема на прямой. Верно ли, что найдётся интервал на котором она выпулка или вогнута?

5. Сделайте эскиз графиков функций

$$1)\ y = \frac{x}{\ln x}, \quad 2)\ y = (2x+5)e^{-2x-4}.$$

6. Сделайте эскиз графика параметрически заданной кривой

$$x = 1+t-t^2,\ y = t(1-t^2)+t^2.$$

7. Сделайте эскизы графиков кривых заданных неявно

$$1)\ x^5+y^5 = xy \quad 2)\ x^4+y^5 = 2x^2y^2.$$

8. Пусть $A, B \subset \mathbb{R}$ — непустые множества. Докажите, что $A\times B \subset \mathbb{R}^2$ открыто тогда и только тогда, когда A, B открыты, и замкнуто тогда и только тогда, когда A, B замкнуты.

9*. Пусть $A, B \subset \mathbb{R}^n$ — непустые множества. Их *суммой Минковского* называется множество $A+B := \{a+b \mid a \in A, b \in B\}$.
1) Верно ли, что сумма Минковского компактов компактна?
2) Верно ли, что сумма Минковского замкнутых множеств замкнута?
3) Верно ли, что сумма Минковского открытых множеств открыта?

10. Найти частные первые производные

$$1)\ x^y, \quad 2)\ \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}, \quad 3)\ \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad 4)\ x^{y^z}$$

11. Найти частные производные указанного порядка

$$1)\ \frac{\partial^3 u}{\partial^2 x\partial y},\ \text{если } u(x,y) = x\ln(xy), \qquad 2)\ \frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z},\ \text{если } u(x,y,z) = \operatorname{arctg}\frac{x+y+z-xyz}{1-xy-xz-yz}.$$

13. Дифференцируема ли в нуле функция $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^6}$?

14. Найти градиенты функций

$$1)\ f(x) = e^{|x|},\ \text{где } x \in \mathbb{R}^n,$$

$$2)\ g(x) = f(Ax),$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, f — дифференцируемая функция на $\mathbb{R}^n$, A — матрица линейного оператора из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$.