

Семинарский листок 9
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ-I

Функции многих переменных

1. Рассмотрим функцию $f(x, y) = e^{-x^2y^2 - y^2x^2}$ при $xy \neq 0$ и $f(x, y) = 0$, $xy = 0$. Есть ли у неё частные производные в 0? Непрерывна ли функция в 0?

2. а) Докажите, что евклидова норма на \mathbb{R}^n удовлетворяет условию Липшица.

б) Докажите, что всякая норма на \mathbb{R}^n с евклидовой нормой удовлетворяет условию Липшица.

3. Докажите, что все нормы в конечномерном векторном пространстве над \mathbb{R} эквивалентны.

4. Докажите, что частные производные перестановочны, т.е. если функция $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ имеет в области $G \subset \mathbb{R}^m$ частные производные второго порядка $\partial^2 f / \partial x_i \partial x_j$ и $\partial^2 f / \partial x_j \partial x_i$ и если обе эти производные непрерывны в некоторой точке $x \in G$, то они совпадают в этой точке.

5. (Пример Шварца) Рассмотрим функцию

$$f(x, y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, \quad x^2 + y^2 \neq 0, \quad f(0, 0) = 0.$$

Докажите, что в нуле $f''_{xy} \neq f''_{yx}$.

6. Найти градиенты функций $\frac{xy}{x^2+y^2}$, $\frac{1}{|x|}$, $\ln|x|$. Две последние функции — функции на \mathbb{R}^n .

7. Пусть $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — линейный оператор (не обязательно симметричный) с матрицей A , т.е. $L(x) = Ax$. Найдите градиент функции $f(x) = \langle Ax, x \rangle$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — стандартное скалярное произведение на \mathbb{R}^n .

Определение. *Линией уровня функции f на \mathbb{R}^2 называется кривая на плоскости \mathbb{R}^2 , в каждой точке которой функция сохраняет постоянное значение, т.е. множество всех точек плоскости, для которых $f(x, y) = C = \text{const}$.*

8. а) Найдите линию уровня функции $f(x, y) = x^2 + 4y^2$.

б) Выберите точку (x_0, y_0) на найденной линии уровня. Найдите уравнение касательной к линии уровня в точке (x_0, y_0) .

в) Найдите градиент функции в точке (x_0, y_0) .

г) Покажите, что градиент ортогонален линии уровня относительно стандартного скалярного произведения на \mathbb{R}^2 .

д) Случаен ли результат пункта г)?

9. Вычислите вторую производную неявной функции.

10. Исследуйте неявную функцию $F(x, y) = x^3 + y^3 - 2xy$ на монотонность и выпуклость в точке $(1, 1)$.