Определители

ГЛ5◇1. Две строки 3×3-матрицы заполнены целыми числами так, что строки не пропорциональны над $\mathbb{Q}$ и нод каждой из них равен единице. Всегда ли можно заполнить третью строку целыми числами так, чтобы определитель оказался единичным?

ГЛ5◇2. Двое по очереди заполняют целыми числами клетки матрицы 3×3. Первый выигрывает, если в результате получится вырожденная матрица. Кто победит?

ГЛ5◇3. Сколько $n\times n$ матриц определителя 1 имеется над полем из q элементов?

ГЛ5◇4. Числа $1, 2, 3, \dots, n^2$ всеми возможными способами организуются в квадратные матрицы размера $n\times n$. Найдите сумму определителей этих матриц.

ГЛ5◇5 (теорема об окаймляющих минорах). Докажите, что $\operatorname{rk} A = m$ если и только если в A есть такая невырожденная подматрица размера $m\times m$, что все содержащие её подматрицы размера $(m+1)\times(m+1)$ вырождены.

ГЛ5◇6*. Существует ли комплексная 2×4 матрица с множеством 2×2 миноров
а) $\{\,2\,,\ 3\,,\ 4\,,\ 5\,,\ 6\,,\ 7\,\}$ **б)** $\{\,3\,,\ 4\,,\ 5\,,\ 6\,,\ 7\,,\ 8\,\}$?
Если да — приведите пример такой матрицы, если нет — объясните, почему.

ГЛ5◇7. Вычислите все частные производные $\partial^k \det(A)/\partial a_{i_1 j_1}\dots\partial a_{i_k j_k}$.

ГЛ5◇8*. Вычислите $\det(x^{j-i-1 \pmod n})$, где $1\leqslant i,j\leqslant n$.

ГЛ5◇9* (Циркулянт). Пусть $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_{n-1}x^{n+1}$ комплексный многочлен. Докажите, что определитель матрицы циркулянта

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-4} & a_{n-3} \\ & \vdots & & & \vdots & \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}$$

равен $\prod_{k=0}^{n-1} P(\xi^k)$, где $\xi = e^{\frac{2\pi i}{n}}$.

ГЛ5◇10* (матричная теорема о деревьях). Вершины связного графа $\varGamma$ без петель[1] и кратных рёбер[2] занумерованы числами от 1 до n. Матрица $A=(a_{ij})$ имеет диагональными элементами a_{ii} взятые со знаком минус количества рёбер, выходящих из i-той вершины, а остальные a_{ij} равны единице, если вершины i и j соединены ребром, и нулю — если не соединены. Убедитесь, что $\det A = 0$ и докажите, что **а)** все алгебраические дополнения A_{ii} к элементам главной диагонали отличны от нуля и равны между собой **б)** $\varGamma$ дерево если и только если все $A_{ii}=1$.

ГЛ5◇11*. Докажите, что для любых двух матриц $A,B\in\operatorname{Mat}_n(\Bbbk)$ в $\Bbbk[x,y]$ выполнено равенство $\det(xA+yB)=\sum_{k=0}^{n} x^k y^{n-k}\operatorname{tr}(\mathcal{A}_k\mathcal{B}_k^\vee)$, где $\mathcal{A}_k$ и $\mathcal{B}_k^\vee$ суть матрицы размера $\binom{n}{k}\times\binom{n}{k}$, клетки которых нумеруются k-элементными подмножествами $I,J\subset\{1,\,2,\,\dots\,,\,n\}$ и которые имеют в позиции IJ, соответственно, минор a_{IJ} матрицы A и алгебраическое дополнение $(-1)^{|J|+|I|}b_{\hat{J}\hat{I}}$ к JI-тому минору матрицы B.

[1] Т. е. рёбер, ведущих из вершины в неё саму.
[2] Т. е. любые две вершины графа соединяются не более, чем одним ребром.

Персональный табель ____ .
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

Листок № 5 08.12.2023)

№	дата	кто принял	подпись
1			
2			
3			
4			
5			
6а			
б			
7			
8			
9			
10а			
б			
11			