ЛИСТОК 2 ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

Листок сдается очно 19 декабря по предварительной записи (см. гугл-форму на странице курса). Запись заканчивается 16 декабря. Записываются те, кто решил не менее трех задач.

1. 1 (1+3). Докажите, что корни уравнения $z^n = 1$ образуют группу по умножению порядка n. Сформулируйте и докажите обратную теорему.

2. (3 + 1) a) Покажите, что если матрицы $A(t)$ коммутируют друг с другом при разных значениях t, то для решения уравнения $\dot{x} = A(t)x$ верна формула $x(t) = \exp\int(A(t)dt)c$, где c — произвольный вектор.

   b) На примере системы $\dot{x} = y, \dot{y} = tx$ покажите, что эта формула неверна в общем случае.

3. (7) Для любой непрерывной функции f на окружности $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ и любого угла ϕ для которого отношение $\frac{\phi}{2\pi}$ иррационально, докажите, что временно́е среднее функции f вдоль орбиты иррационального поворота на угол ϕ — величина $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_0^{n-1} f(x+k\phi)$ — равна пространственному среднему $\frac{1}{2\pi}\int_{S^1} f(x)dx$.

   Указание. Рассмотрите случай, когда f — тригонометрический многочлен, а затем воспользуйтесь теоремой Вейерштрасса о приближении непрерывной функции тригонометрическим многочленом.

4. (3) Полно ли пространство непрерывных функций на отрезке $[0,1]$ с нормой $\|f\| = \int_0^1 |f(x)|dx$?

5. (5) Найдите производную 2π-периодического решения уравнения $\dot{x} + \sin x = \varepsilon\cos t$, обращающегося при $\varepsilon = 0$ в $x \equiv 0$, по ε при $\varepsilon = 0$.

6. Пусть $A(t)$ — 2π-периодическая непрерывная 2×2-матрица со следом $\operatorname{tr} A(t) = \sin t$. Пусть M — матрица монодромии за период системы $\dot{x} = A(t)x$. Докажите, что если $|\operatorname{tr} M| < 2$, то нулевое решение этой системы устойчиво по Ляпунову, а если $|\operatorname{tr} M| > 2$, то неустойчиво.

7. (5 + 2) Исследуйте на устойчивость нулевое решение системы $\dot{x} = A(t)x$, где матрица A 2-периодическая, причем

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & -b \\ b & 1 \end{pmatrix}, t \in [0,1),$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, t \in [1,2).$$

   a) $b = \frac{\pi}{2}$ b) $b = \frac{\pi}{4}$.