# Геометрическое введение в алгебраическую геометрию. Осень 2023г

Решения этих задач будут обсуждаться после каникул в январе. Баллы за решение этих задач могут быть использованы для повышения оценки за прошедший семестр, для этого решения надо прислать до 24:00 ПОНЕДЕЛЬНИКА, 18.12.2023. Баллы за решения, присланные позже (как обычно, до 24:00 субботы перед следующим занятием), будут учитываться в оценке за 3-й модуль. Как обычно, внятно записанные (а лучше затеханные) решения нужно присылать на почту alggem23@gmail.com.

## Задания с 11 занятия.

(1) Пусть $X \in \mathbb{P}^2$ — проективная кривая, заданная однородным уравнением $F(x_0 : x_1 : x_2) = 0$ степени $d$, $a \in X$. Покажите, что ее $d-2$ поляра $P_{a^{d-2}}X$ задается уравнением $\sum \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(a) x_i x_j = 0$

(2) Докажите, что проективная кривая $X$, заданная в аффинной карте уравнением $y^2 = f_3(x)$, где $f_3$ — кубический многочлен, неособа тогда и только тогда, когда $f_3$ не имеет кратных корней.

(3) Докажите, что если многочлен $f_3(x)$ не имеет кратных корней, то проективная кривая $X$ из предыдущей задачи имеет ровно 9 различных точек перегиба.

(4) Системой Штейнера называется пара $(Z, \mathcal{L})$, где $Z$ — конечное множество, а $\mathcal{L} \subset 2^Z$, такое что $\forall\ L \in \mathcal{L}\ |L| = 3$ и $\forall\ A, B \in Z$ $(A \neq B)$, $\exists$ единственное $L \in \mathcal{L}$, такое что $A, B \in L$. [Трехэлементные множества из $\mathcal{L}$ естественно интерпретировать как "прямые", проходящие через точки $Z$. На занятии мы доказали, что множество точек перегиба неособой кубической кривой является системой Штейнера.] Докажите, что число точек в любой системе Штейнера при делении на 6 может давать остатки только 1 и 3.

(5) Докажите, что системы Штейнера из 7 и 9 точек изоморфны, соответственно, $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2)$ и $\mathbb{A}^2(\mathbb{F}_3)$.

(6) Докажите, что любые две системы Штейнера из 9 точек на проективной плоскости ("прямые" — это настоящие прямые) проективно эквивалентны, т.е. переводятся друг в друга проективным преобразованием плоскости.

(7) Пусть $Y$ — неприводимая кривая на плоскости, задаваемая уравнением $G(x_0 : x_1 : x_2) = 0$ степени $d$, причем известно, что некоторая прямая пересекает $Y$ в $d$ различных точках. Пусть некоторая однородная форма $F(x_0 : x_1 : x_2)$ обращается в ноль на $Y$. Докажите, что форма $F$ делится на форму $G$.