Список тем письменного экзамена по курсу

«Линейная алгебра и геометрия»

за осенний семестр 2023/24 учебного года

ТЕМА 1. Векторные пространства. Порождающие наборы векторов, линейная зависимость, лемма о замене, существование и свойства базисов. Размерность суммы и пересечения подпространств. Прямые суммы векторных пространств и подпространств, дополнительные подпространства. Фактор пространства, размерность фактора.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: *Находить размерности и указывать базисы в разнообразных пространствах: в линейных оболочках данных векторов, в пространствах решений ситем уравнений, в пересечениях и суммах таких пространств; выяснять, являются ли данные векторы линейно зависимыми и/или порождающими; выяснять, является ли сумма заданных подпространств прямой..*

ТЕМА 2. Линейные отображения, размерность ядра и образа, непустые слои являются сдвигами ядра. Матрица линейного отображения, размерность и базисы пространства линейных отображений, произведение матриц и композиция отображений.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: *выписывать матрицу отображения в заданных базисах и понимать, как она меняется при смене базисов; находить размерность ядра и образа, а также указывать в них явные базисы.*

ТЕМА 3. Аффинные пространства, аффинизация векторного пространства и векторизация аффинного пространства. Пересечение аффинных подпространств. Аффинный репер и аффинные координаты. Центр тяжести взвешенных точек, барицентрические комбинации точек, барицентрические координаты.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: *находить размерность аффинной оболочки заданного набора точек, а также размерность пересечения аффинных подпространств, заданных уравнениями или как аффинные оболочки наборов точек, либо доказывать, что такое пересечение пусто; находить центр тяжести и применять теорему о группировании масс; написать уравнение (соотв. неравенство), задающее в аффинных или в барицентрических координатах гиперплоскость (соотв. полупостранство) с предписанными геометрическими свойствами.*

ТЕМА 4. Аффинные отображения, дифференциал аффинного отображения. Дифференциал композиции аффинных отображений. Группа аффинных преобразований, аффинное преобразование n-мерного пространства однозначно задаётся своим действием на $n+1$ точек, не лежащих в одной гиперплоскости.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: *описывать образы и прообразы точек, прямых и других фигур при заданных аффинных преобразованиях, а также находить неподвижные точки и инвариантные прямые аффинных преобразований; предъявлять аффинные преобразования с предписанным действием на те или иные фигуры или доказывать, что таких аффинных преобразований не существует.*

ТЕМА 5. Евклидова плоскость, неравенства треугольника и Коши – Буняковского – Шварца, длины векторов, ориентированный угол между векторами. Ортогональные группы O_2, SO_2. Матрица Грама двух векторов. Определитель матрицы Грама и квадрат прощади параллелограмма. Сохранение матрицы Грама для базиса при ортогональном преобразовании. Группа движений евклидовой плоскости, теорема Шаля.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: *знать примеры конкретных проявлений неравенства Коши – Буняковского – Шварца; находить ортогональную проекцию и нормальную составляющую вектора относительно данного ненулевого вектора; находить расстояния между точками, точками и прямыми, а также углы между прямыми и площади треугольников и параллелограммов на евклидовой плоскости; вычислять композиции движений плоскости, определять тип движения по классификации Шаля; отыскивать центры поворотов, а также оси и векторы сдвига скользящих симметрий на плоскости; отличать собственные движения и подобия от несобственных, вычислять композиции движений; вкладывать евклидову плоскость $x_1+x_2+x_3=1$ в евклидовое трехмерное пространство[7].*

ТЕМА 6. Векторные и афинные пространства над кончными полями. Количество элементов в конечном поле. Количество точек в подпространствах. Количества различных подпространств. Группы обратимых матриц. Матрицы разных рангов.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: *Находить сколько точек в подпространствах, сколько подпространств различных размерностей, сколько подпространств данной размерности пересекается с данным подпространством по подпространству фиксированной размерности, сколько матриц ранга 1, сколько матриц в группе $GL_n(\mathbb{F}_q)$, сколько матриц в группе $SL_n(\mathbb{F}_q)$ [5] ГЛ1.1, [6] ГЛ2.1, ГЛ2.2, [8] ГЛ5.3.*

ТЕМА 7. Алгебра матриц, ассоциативность и дистрибутивность умножения матриц. Матрица перехода от одного набора векторов к другому. Обратимые матрицы, критерии обратимости. Изменение матрицы $F_{\boldsymbol{e}}$ линейного эндоморфизма $F : V \to V$ при смене базиса $\boldsymbol{e}$ в V. Ранг матрицы: размерность линейной оболочки строк равна размерности линейной оболочки столбцов.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: *свободно перемножать матрицы; получать из данной матрицы A матрицу с предписанными строками и столбцами при помощи умножения матрицы A на подходящую матрицу с нужной стороны; применять таблицу умножения базисных матриц E_{ij} при практических вычислениях; использовать матричные обозначения для линейных выражений одних векторов через другие и свободно оперировать с матрицами перехода C_{uw}; находить ранг матрицы методом Гаусса или по теореме об окаймляющих минорах; оценивать ранг произведения и суммы матриц.*

ТЕМА 8. Качественный анализ систем линейных уравнений: матричная запись, интерпретация в терминах линейных отображений, критерии разрешимости, размерность и структура аффинного пространства решений, альтернатива Фредгольма и специализации всего этого для систем, у которых число уравнений равно числу неизвестных.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: *оценивать размерность пространства решений и выяснять, совместна ли система, не решая уравнений явно.*

ТЕМА 9. Метод Гаусса: преобразование матрицы к приведённому ступенчатому виду при помощи элементарных операций над строками. Использование метода Гаусса для отыскания базиса в линейной оболочке конечного множества векторов, для решения системы линейных уравнений, для анализа обратимости и отыскания обратной матрицы, для отыскания базиса в ядре и образе линейного отображения и в факторе координатного пространства по линейной оболочке заданного конечного множества векторов. Комбинаторный тип векторного подпространства в $\Bbbk^n$, единственность базиса с приведённой ступенчатой матрицей координат.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: *преобразовывать матрицу к приведённому ступенчатому виду и находить её ранг, а также обратную матрицу, если последняя существует; разделять неизвестные в системе линейных уравнений на свободные и связанные, указывать параметрическое описание всех решений, а также аффинный репер в пространстве решений; предъявлять базис в U и в $\Bbbk^n/U$ для подпространства $U \subset \Bbbk^n$, заданного системой линейных однородных уравнений или как линейная оболочка набора векторов; предъявлять базис в $\ker F$ и в $\operatorname{im} F$ для оператора $F : \Bbbk^n \to \Bbbk^m$, заданного явной матрицей в явнях базисах.*

ТЕМА 10. Двойственное пространство, двойственные базисы, координаты линейной формы в двойственном базисе. Вложение $V \hookrightarrow V^{**}$ и изоморфизм $V \simeq V^{**}$ для конечномерного V. Задание подпространств системами однородных уравнений: аннуляторы, биекция $U \leftrightarrow \operatorname{Ann} U$ между подпространствами дополнительных размерностей в V и в V^* инволютивна, обращает включения и переводит суммы в пересечения, а пересечения — в суммы. Пространства, двойственные к подпространству и к фактор пространству, описание двойственного пространства к линейной оболочке заданного набора векторов, ранг матрицы. Двойственные линейные отображения, связь между их ядрами и образами.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: *описывать базис, двойственный к данному; написать матрицу двойственного оператора в двойственном базисе; находить размерность, указывать базис и задавать уравнениями векторные подпространства вида $U + W$ и $U \cap W$, если известны векторы, порождающие подпространства $U, W \subset \Bbbk^n$, и/или линейные уравнения, задающие эти подпространства.*

ТЕМА 11. Объём ориентированного параллелепипеда, полилинейные кососимметричные и знакопеременные формы, пространство кососимметричных n-линейных форм на n-мерном пространстве одномерно. Чётность и длина перестановки. Определитель квадратной матрицы и определитель линейного оператора: полилинейность, инвариантность относительно транспонирования, мультипликативность. Правила Крамера для решения невырожденных систем из n неоднородных и

$n-1$ однородных линейных уравнений на n неизвестных. Присоединённая матрица, тождество $A \cdot A^{\vee} = A^{\vee} \cdot A = \det(A) \cdot E$, явная формула для обратной матрицы. След линейного оператора $\operatorname{tr} A$.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: *находить знаки перестановок; вычислять определители и миноры разнообразных матриц; пользоваться правилами Крамера, формулой для обратной матрицы и формулами для разложения определителя по строкам и столбцам, в частности, быстро обращать матрицы размера* 2×2 *и* 3×3 *и решать системы из двух неоднородных (соотв. однородных) линейных уравнений на две (соотв. три) неизвестных*[8], [9] *ГЛ6.1,2.*

Список литературы

[1] http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/2122/lec_total.pdf

[2] Э.Б.Винберг. Курс алгебры

[3] А.И.Кострикин, Ю.И.Манин. Линейная алгебра и геометрия

[4] А.И. Кострикин. Введение в алгебру, часть II, Линейная алгебра

[5] https://math.hse.ru/data/2023/09/15/2058008795/prb_01_plane.pdf

[6] https://math.hse.ru/data/2023/10/11/2046859153/prb_02_hidim.pdf

[7] https://math.hse.ru/data/2023/11/07/2054720845/prb_03_eucplan.pdf

[8] https://math.hse.ru/data/2023/12/08/2110392792/prb_05_dets.pdf

[9] https://math.hse.ru/data/2023/12/08/2110392776/prb_06_ops.pdf

[10] https://en.wikipedia.org/wiki/Affine_space

[11] https://en.wikipedia.org/wiki/Barycentric_coordinate_system

[12] Можно использовать любые понятные вам источники