Первый семинар

Топология и дифференциальные формы

(все нужные определения или были,или будут на первой лекции)

0. Пусть $P \subset Q$, где P замкнуто, а Q открыто в топологическом пространстве. Показать,что множество $Q \backslash P$ открыто.

1. Пусть M – гладкое n-многообразие. Доказать, что существует такой атлас его гладкой структуры, в котором каждая карта гомеоморфно отображается на
а) внутренность евклидова шара,
б) $\mathbb{R}^n$.

2. Пусть X – компактное, хаусдорфово топологическое пространство, а U_k – его конечное открытое покрытие. Построить непрерывное разбиение единицы, подчиненное этому покрытию.

Пусть X – локально-компактное, хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой.

3. Доказать, что в X можно выбрать такую Матрешку $K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \ldots \subset K_l \subset \ldots$, состоящую из компактов K_i, что $X = \bigcup K_j$.

4*. Доказать, что любое открытое покрытие X можно измельчить до локально-конечного открытого покрытия, состоящего из относительно компактных множеств.

5. Доказать, что в алгебре Грассмана квадрат формы нечетной степени равен нулю.

6. Доказать, что формы четной степени образуют подалгебру алгебры Грассмана, совпадающую с ее центром.

7. Проверить, что дифференциальная 1-форма в $\mathbb{R}^2$ $y^2dx + 2xydy$ замкнута и показать, что она точна.

8. Проверить, что дифференциальная 3-форма в $\mathbb{R}^3$ $12x^2y^3z^4dx \wedge dy \wedge dz$ замкнута и показать, что она точна.