Второй семинар

Ориентация. Интегрирование форм

1. Доказать, что вещественное проективная плоскость неориентируема, а вещественное проективное трехмерное пространство ориентируемо.

2. Сфера $X^2+Y^2+Z^2+W^2=1$ покрыта двумя картами: (Сфера -северный полюс, стереографическая проекция из северного полюса на экваториальную плоскость), (Сфера -южный полюс, стереографическая проекция из южного полюса на экваториальную плоскость). Каждая карта ориентирована выбором стандартной ориентации (X, Y, Z) экваториальной плоскости. Совпадает ли эта ориентация с ориентацией этих карт с помощью внешней нормали к сфере?

3. Пусть G – конечная линейная группа, действующая без неподвижных точек в векторном пространстве V с удаленным нулем. Доказать, что фактор-пространство $X=V/G$ является гладким многообразием.

4. Фактор-пространство X из задачи 3 ориентируемо тогда и только тогда, когда группа G не содержит линейных преобразований с отрицательным определителем.

5*. Ориентрируемо ли вещественное многообразие Грассмана $G(2,4)$?

6. Пусть $\alpha=xdx+ydy+zdz$, $\beta=zdx+xdy+ydz$, $\gamma=xydz$. Рассмотрим квадрат $Q \mid 0<x<1, 0<y<1, z=1$, ориентированный нормалью в направлении положительной оси z. Вычислить интегралы от форм $\alpha\wedge\beta, \alpha\wedge\gamma$ по ориентированному квадрату Q.

7. Пусть S –единичная сфера $x^2+y^2+z^2=1$, ориентированная внутренней нормалью. Вычислить $\int\limits_S z dx\wedge dy$.

8. Рассмотрим кусок гиперболоида $S=(z^2-x^2-y^2=1, 1\leq z\leq\sqrt{2})$, ориентированный внешней нормалью. Вычислить $\int\limits_S \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx\wedge dz$.