

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО – 2024  
ЛИСТОК 2

Дробно-линейной функцией (д.-л. функцией) называется функция вида

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc \neq 0.$$

1. Докажите, что д.-л. функция осуществляет взаимно-однозначное отображение  $\bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ .

2. Докажите, что д.-л. отображения образуют группу. Какой группе она изоморфна?

3. Докажите, что д.-л. функция переводит окружности и прямые в окружности (или прямые).

4. Напишите д.-л. функцию, переводящую три произвольные (различные) точки  $z_1, z_2, z_3$  в три другие (различные) точки  $w_1, w_2, w_3$ . Единственна ли она?

5. Во что преобразуется квадрант  $x > 0, y > 0$  при отображении  $w = \frac{z - i}{z + i}$ ?

6. Найдите все дробно-линейные функции  $f$  такие, что  $f(f(z)) = z$ .

7. Докажите, что бидифференциал  $\frac{dz_1 dz_2}{(z_1 - z_2)^2}$  инвариантен относительно д.-л. преобразований.

Двойным отношением четырех различных точек  $z_1, z_2, z_3, z_4$  называется

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)}.$$

Производной Шварца (шварцианом) голоморфной функции  $w(z)$  называется выражение

$$S(w; z) := \frac{w'''(z)}{w'(z)} - \frac{3}{2} \left( \frac{w''(z)}{w'(z)} \right)^2.$$

8. Докажите следующее тождество, связывающее двойное отношение со шварцианом:

$$\frac{(w(z + ta), w(z + tb), w(z + tc), w(z + td))}{(a, b, c, d)} = 1 + \frac{t^2}{6} (a-b)(c-d)S(w; z) + O(t^3)$$

( $t \rightarrow 0$ ).

9. Докажите, что д.-л. функция сохраняет двойное отношение:

$$(f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)) = (z_1, z_2, z_3, z_4).$$

10. Докажите, что  $S(w; z) = 0$  тогда и только тогда, когда  $w(z)$  – д.-л. функция.

11. Докажите, что четыре различные точки лежат на одной окружности (или на одной прямой), если и только если их двойное отношение вещественно.

12. Докажите, что

$$S(w; z) = 6 \lim_{\zeta \rightarrow z} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \zeta} \log \frac{w(z) - w(\zeta)}{z - \zeta}.$$

13. Пусть  $w(z)$ ,  $f(w)$  – две функции,  $F$  – их композиция:  $F(z) = f(w(z))$ . Докажите, что

$$S(F; z) = S(f; w) \left( \frac{dw}{dz} \right)^2 + S(w; z).$$

14. Пусть  $f_1, f_2$  – два линейно независимых решения дифференциального уравнения  $f'' + Q(z)f = 0$ . Покажите, что  $Q(z) = \frac{1}{2} S(f_1/f_2; z)$ .

15. Найдите общий вид д.-л. изоморфизмов (а)  $\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ , (б)  $\mathbb{U} \rightarrow \mathbb{U}$ , (в)  $\mathbb{U} \rightarrow \mathbb{H}$  ( $\mathbb{H}$  – верхняя полуплоскость,  $\mathbb{U}$  – единичный круг).

16. Отобразите верхнюю полуплоскость на единичный круг так, чтобы  $w(2i) = 0$ ,  $\arg w'(2i) = 0$ .

17. Сколько неподвижных точек может иметь д.-л. преобразование? Докажите, что если д.-л. преобразование имеет две неподвижные точки, то произведение производных в этих точках равно 1.

18. Д.-л. преобразование с одной неподвижной точкой  $z_0$  называется параболическим. Докажите, что параболическое преобразование можно записать в канонической форме

$$\frac{1}{w - z_0} = \frac{1}{z - z_0} + h$$

если  $z_0 \neq \infty$  и  $w = z + h$  если  $z_0 = \infty$ .

19. Докажите, что д.-л. преобразование с двумя различными неподвижными точками  $z_1, z_2$  можно представить в канонической форме

$$\frac{w - z_1}{w - z_2} = k \frac{z - z_1}{z - z_2}$$

если  $z_{1,2} \neq \infty$  и  $w - z_1 = k(z - z_1)$  если  $z_2 = \infty$ . Преобразование называется гиперболическим, если  $k > 0$ , эллиптическим если  $|k| = 1$  ( $k \neq 1$ ) и локсодромическим в общем случае комплексного  $k$ .