Задачи для подготовки к контрольной № 4

ПК4◇1. Найдите собственные числа, укажите какие-нибудь базисы в собственных и корневых подпространствах и выясните, диагонализуемы ли линейные операторы $\mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^3$, заданные в стандартном базисе матрицами:

а) $\begin{pmatrix} 13 & 75 & -21 \\ -16 & -108 & 31 \\ -48 & -330 & 95 \end{pmatrix}$ **б)** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -7 & -2 & -5 \end{pmatrix}$ **в)** $\begin{pmatrix} -7 & 6 & -5 \\ 6 & -11 & 7 \\ 12 & -16 & 11 \end{pmatrix}$ **г)** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

ОТВЕТ: В базисах из столбцов матриц

$$(а)\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -1 & 4 & -1 \\ -3 & 12 & -2 \end{pmatrix},\quad (б)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -3 & 7 & -6 \end{pmatrix},\quad (в)\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \\ -2 & -5 & 6 \end{pmatrix},\quad (г)\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

операторы имеют матрицы

$$(а)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},\quad (б)\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},\quad (в)\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},\quad (г)\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

ПК4◇2. Над полем $\mathbb{Q}$ найдите минимальные многочлен матриц

а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **б)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ **в)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ **г)** $\begin{pmatrix} -2 & -3 & 3 & 3 \\ 4 & 6 & -4 & -4 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$

и выясните, диагонализуемы ли эти матрицы.

ОТВЕТ: в (а) $t^3+t^2-t-1 = (t-1)(t+1)^2$, в (б) $t^3-5t^2+8t-4 = (t-2)^2(t-1)$, в (в) $t^3-4t^2+5t-2 = (t-2)(t-1)^2$, в (г) $t^3-t^2-4t+4 = (t-2)(t-1)(t+2)$.

ПК4◇3. Линейный оператор $\mathbb{Q}^3 \mapsto \mathbb{Q}^3$ имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{pmatrix} -11 & 2 & -2 \\ -15 & 2 & -3 \\ 30 & -6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Существует ли в $\mathbb{Q}^3$ такой базис, в котором этот оператор записывается матрицей

а) $\begin{pmatrix} -3 & -3 & 1 \\ 5 & 5 & -2 \\ 13 & 15 & -6 \end{pmatrix}$ **б)** $\begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 6 & -3 & -2 \\ -12 & 4 & 3 \end{pmatrix}$?

ОТВЕТ: в (б) — да, в (а) — нет; все три матрицы имеют хар. многочлен $t^3+4t^2+5t+2 = (t+1)^2(t+2)$, и одномерное собственное подпространство V_{-2}, но у данного оператора и оператора из (б) $\dim V_{-1} = 2$, тогда как в (а) $\dim V_{-1} = 1$.

ПК4◇4. Матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}$ задаёт на пространстве всех матриц размера 2×2 линейный оператор $X \mapsto AX - XA$. Найдите минимальный многочлен этого оператора.

ОТВЕТ: для диагональной матрицы A с собственными числами $\lambda_1 \neq \lambda_2$ оператор диагонализуем с двукратным собственным числом 0 и однократными собственными числами $\pm(\lambda_2 - \lambda_1)$, откуда
$\mu(t) = t\left(t - (\lambda_2-\lambda_1)^2\right) = t(t^2 + 4\det A - \operatorname{tr}^2 A) = t\left(t^2 + 635\right)$.

ПК4◇5. Матрица $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$ задаёт на пространстве всех матриц размера 2×2 линейный оператор $X \mapsto AXA^{-1}$. Найдите минимальный многочлен этого оператора.

ответ: для диагональной матрицы A с собственными числами $\lambda_1 \neq \lambda_2$ оператор диагонализуем с двукратным собственным числом 1 и однократными собственными числами $(\lambda_2/\lambda_1)^{\pm 1}$, откуда $\mu(t) = (t-1)(t^2 - (-2 + \operatorname{tr}^2 A/\det A)t + 1) = (t-1)\left(t^2 + \frac{53t}{14} + 1\right)$.

ПК4◇6. Матрица $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -8 \end{pmatrix}$ задаёт на пространстве всех матриц размера 2×2 линейный оператор $X \mapsto AX + XA$. Найдите минимальный многочлен этого оператора.

ответ: для диагональной матрицы A с собственными числами $\lambda_1 \neq \lambda_2$ оператор диагонализуем с двукратным собственным числом $\lambda_1 + \lambda_2$ и однократными собственными числами $2\lambda_1$, $2\lambda_2$, откуда $\mu(t) = t^3 - 3\operatorname{tr}\cdot t^2 + (4\det + 2\operatorname{tr}^2)\cdot t - 4\operatorname{tr}\det = t^3 + 27t^2 + 186t + 216$, при этом $\det A = 6$, $\operatorname{tr} A = -9$.

ПК4◇7 (Трёхдиагональные матрицы). Вычислите определитель трёхдиагональной матрицы размера $n \times n$:

а) $$\left.\begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 & \dots & & & \dots & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & \dots & & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ & \ddots & & & \ddots & & & \\ & & \ddots & & & \ddots & & \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & \dots & & & \dots & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}\right\} n$$

б) $$\left.\begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & \dots & & & \dots & 0 \\ -1 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & \dots & & \dots & 0 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ & \ddots & & & \ddots & & & \\ & & \ddots & & & \ddots & & \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & -1 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & \dots & & & \dots & 0 & -1 & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}\right\} n$$

ответ: в (а) рекуррентная формула $\Delta_n = 5\Delta_{n-1} - 6\Delta_{n-2}$, минимальный многочлен для сдвига $\mu(t) = t^2 - 5t + 6$, $\Delta_n = 3^{n+1} - 2^{n+1}$
в (б) рекуррентная формула $\Delta_n = -\frac{1}{6}\Delta_{n-1} + \frac{1}{6}\Delta_{n-2}$, минимальный многочлен для сдвига $\mu(t) = t^2 + \frac{1}{6}t - \frac{1}{6}$, $\Delta_n = \frac{3}{5}(-\frac{1}{2})^n + \frac{2}{5}(\frac{1}{3})^n$

ПК4◇8. Напишите такую вещественную 2×2 матрицу A, что

а) $A^5 = \begin{pmatrix} -31 & -16 \\ 56 & 29 \end{pmatrix}$ **б)** $A^4 = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ **в)** $A^3 = \begin{pmatrix} -128 & 25 \\ -650 & 127 \end{pmatrix}$ **г)** $A^2 = \begin{pmatrix} -18 & -5 \\ 80 & 22 \end{pmatrix}$.

ОТВЕТ: в (а) собственые числа: 1, -3, интерполяционный многочлен $\frac{3}{4}+\frac{\sqrt[5]{-3}}{4}+\left(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt[5]{-3}}{4}\right)\cdot t$, искомая матрица

$$\begin{pmatrix} -7+8\sqrt[5]{-3} & -4+4\sqrt[5]{-3} \\ 14-14\sqrt[5]{-3} & 8-7\sqrt[5]{-3} \end{pmatrix},$$

в (б) двукратное собственное число 1, интерполяционный многочлен $\frac{3}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)\cdot t$, искомая матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

в (в) собственые числа: -3, 2, интерполяционный многочлен $\frac{3\sqrt[3]{2}}{5}+\frac{2\sqrt[3]{-3}}{5}+\left(\frac{\sqrt[3]{2}}{5}-\frac{\sqrt[3]{-3}}{5}\right)\cdot t$, искомая матрица

$$\begin{pmatrix} -25\sqrt[3]{2}+26\sqrt[3]{-3} & 5\sqrt[3]{2}-5\sqrt[3]{-3} \\ -130\sqrt[3]{2}+130\sqrt[3]{-3} & 26\sqrt[3]{2}-25\sqrt[3]{-3} \end{pmatrix}.$$

в (г) двукратное собственное число 2, интерполяционный многочлен $\frac{\sqrt{2}}{2}+\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\cdot t$, искомая матрица

$$\begin{pmatrix} -4\sqrt{2} & -\frac{5\sqrt{2}}{4} \\ 20\sqrt{2} & 6\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$