

## Третий семинар

### Темы: ориентация, разбиение единицы, интегрирование

Все многообразия предполагаются гладкими

1. Прямое произведение ориентируемых многообразий ориентируемо. Почему? (желающие могут доказать, что сформулированное достаточное условие ориентируемости прямого произведения является и необходимым)

2. Группы  $GL(n, \mathbb{R})$ ,  $SL(n, \mathbb{R})$ ,  $SO(n, \mathbb{R})$ ,  $SU(n, \mathbb{R})$  (как и всякая группа Ли) ориентируемы. Почему?

3. Антиподальное отображение сферы сохраняет ее ориентацию, если сфера имеет нечетную размерность, и обращает ориентацию, если размерность сферы четна. Почему?

4. Задача 3 позволяет ответить на вопрос об ориентируемости вещественного проективного пространства. Как?

5. Ориентировать многообразие – это значит сопоставить каждой карте его атласа число, равное  $\pm 1$ , таким образом, чтобы для всякой пары карт знак якобиана матрицы перехода совпадал со знаком произведения этих чисел. Согласуйте это определение ориентируемости с другими вам известными определениями. Опишите алгоритм интегрирования на многообразии в терминах такого понимания ориентируемости.

6\*. Связное односвязное многообразие ориентируемо. Почему?

7. Постройте график функции  $F(x) = \exp(-1/x)$ ,  $x > 0$ ,  $F(x) = 0$ ,  $x \leq 0$ .

8. Постройте график функции  $V(x) = F(x-a)F(b-x)$ ,  $b > a > 0$ .

9. Построить график функции  $U(x) = \frac{\int_a^b v(x)}{\int_a^b v(x)}$ .

10. Рассмотрим в  $\mathbb{R}^n$  два концентрических шара: замкнутый шар  $B_1$  и открытый шар  $B_2$ , его содержащий. Построить (формульно!) гладкую функцию Урысона  $U: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ ,  $U_{-1}(1) = B_1$ ,  $U_{-1}(0) = \mathbb{R}^n - B_2$ .

11. Ничего не вычисляя, объясните почему интеграл от формы  $dx \wedge dy$  во сфере в  $\mathbb{R}^3$  равен нулю.

12. Интеграл ориентирующей формы по компактному многообразию больше нуля. Почему?

13\*. Используя гладкое разбиение единицы докажите, что любую непрерывную функцию на компактном многообразии можно сколь угодно точно приблизить гладкой функцией.