Группа кос, квантовые группы и приложения

<u>Листок 1. Группа кос</u>

Рекомендуемый срок сдачи: 14.02.2024

---

1. а) Найдите все неэквивалентные неразложимые двумерные представления группы кос B_3:

$$\rho_V : \quad B_3 \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(V), \;\; \dim V = 2.$$

б) Определите, какие из этих представлений являются неприводимыми.

<u>Подсказка:</u> решение упрощается, если учесть, что артиновы генераторы группы кос сопряжены друг другу, а значит их спектры в любом представлении совпадают.

2. Докажите, что группу кос B_n можно задать с использованием набора генераторов $\{b_1^{\pm 1}, c_n^{\pm 1}\}$, где c_n – оператор перестановки концов нитей по циклу $n \to \ldots \to 2 \to 1 \to n$:

$$c_n := b_1 b_2 \ldots b_{n-1}.$$

Здесь b_i – артиновы генераторы элементарных заплетений i-й и $(i+1)$-й нитей (см. записки лекций, стр.9–10).

Предъявите (полный!) список соотношений для такого набора генераторов B_n.

3. Группу кос B_n можно задать с использованием набора генераторов $\{(ij)^{\pm 1}\}_{1 \le i < j \le n}$, где (ij) – операторы перестановки концов пары нитей с номерами i и j:

$$(i\; i{+}1) := b_i, \quad (ij) := b_{j-1}(i\; j{-}1)b_{j-1}^{-1} = (b_{j-1}b_{j-2}\ldots b_{i+1})b_i(b_{j-1}b_{j-2}\ldots b_{i+1})^{-1} \;\; \forall j > i+1.$$

Докажите, что полный набор соотношений для этих генераторов имеет вид

$$\begin{aligned} (ij)(kl) &= (kl)(ij) \quad \forall\, i,j,k,l:\; i<j<k<l \text{ или } k<i<j<l, \\ (ij)(ik) &= (ik)(jk) \;=\; (jk)(ij) \quad \forall\, i<j<k. \end{aligned}$$

4. Завершите доказательство Утверждения 2 из записок лекций (см. стр.16), то есть докажите, что для генераторов $A_{ij} := (ij)^2$ группы крашеных кос выполняются соотношения

$$A_{13}(A_{14}A_{24}A_{34}) \;=\; (A_{14}A_{24}A_{34})A_{13}\,. \tag{1}$$

<u>Подсказка:</u> Воспользуйтесь соотношениями для операторов (ij).

5. Пусть F – свободная группа; $\{A\}$ и $\{B\}$ два набора элементов этой группы; $\langle\{A\}\rangle$ и $\langle\{B\}\rangle$ – их нормальные замыкания в F. Докажите изоморфность фактор-групп

$$\Big(F/\langle\{A\}\rangle\Big)/\langle\{B\}\rangle \simeq \Big(F/\langle\{B\}\rangle\Big)/\langle\{A\}\rangle \simeq F/\langle\{A \cup B\}\rangle\,.$$

6. *[1] Завершите доказательство Утверждения 3 из записок лекций (см. стр.18), то есть выведите формулы сопряжения:

$$\begin{aligned} A_{13}A_{24}A_{13}^{-1} &= (A_{34}^{-1}A_{14}^{-1}A_{34}A_{14})\,A_{24}\,(A_{34}^{-1}A_{14}^{-1}A_{34}A_{14})^{-1}, && (2) \\ A_{13}^{-1}A_{24}A_{13} &= (A_{14}A_{34}A_{14}^{-1}A_{34}^{-1})\,A_{24}\,(A_{14}A_{34}A_{14}^{-1}A_{34}^{-1})^{-1}. && (3) \end{aligned}$$

[1] Звездочкой помечены дополнительные задачи.

<u>Подсказка:</u> Представьте соотношение (1) в виде формулы сопряжения оператора $(A_{14}A_{24}A_{34})$ *и используйте формулы сопряжения, выведенные при доказательстве Утверждения 3 в записках лекций.*

<u>Замечание:</u> Соотношения (1)-(3), сформулированные для набора нидексов $\{1,2,3,4\}$, остаются справедливыми при замене $\{1,2,3,4\} \mapsto \{i,j,k,l\}\ \forall\, i<j<k<l$. Доказательства для всех наборов $\{i,j,k,l\}$ идентичны.

7.* **а)** Докажите, что внутренний автоморфизм группы кос типа $\mathbf{B_{n-1}}$, задаваемый элементом

$$T_n := B_0 b_1 b_2 \dots b_{n-1},$$

порождает циклический сдвиг генераторов:

$$b_{i+1} \;=\; T_n\, b_i\, T_n^{-1} \;\; \forall\, i=1,\dots,n-2, \qquad b_1 \;=\; T_n^2\, b_{n-1}\, T_n^{-2}\,.$$

б) Убедитесь, что отображение артиновых генераторов аффинной группы кос типа $\mathbf{\tilde{A}_{n-1}}$ в группу кос типа $\mathbf{B_{n-1}}$

$$b_i \mapsto b_i \;\; \forall\, i=1,\dots,n-1, \qquad b_0 \mapsto T_n^{-1} b_1 T_n = T_n b_{n-1} T_n^{-1}$$

порождает гомоморфизм групп.