

Геометрическое введение в алгебраическую геометрию. Весна 2024г

Решения этих задач будут обсуждаться на следующем занятии. Как обычно, внятно записанные (а лучше затеханные) решения нужно присылать на почту alggem23@gmail.com, до 24:00 ВТОРНИКА перед следующим занятием.

Задания с 12 занятия.

- (1) На лекции мы доказали, что если X — проективная кривая в \mathbb{P}^2 , $a \in X$ — неособая точка перегиба (по определению это значит, что точка a неособая и касательная $\mathbb{T}_a X$ пересекает кривую X в точке a не менее чем трехкратно), то $a \in X \cap \text{He } X$, где $\text{He } X$ — Гессиан кривой X , т.е. кривая, заданная уравнением $\det \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} \right) = 0$ ($F = 0$ — уравнение кривой X). Докажите, что $X \cap \text{He } X$ состоит в точности из особенностей кривой X (если таковые есть) и точек перегиба.
- (2) Особая точка b плоской кривой $X \in \mathbb{P}^2$ называется простейшей двойной особой точкой с разделенными касательными, если при выборе координат таким образом, что b становится точкой $(0; 0)$ в аффинной карте $x_0 \neq 0$ (с аффинными координатами $x = x_1/x_0$, $y = y_1/y_0$), уравнение кривой X в этих аффинных координатах имеет вид $L_1(x, y)L_2(x, y) + g(x, y) = 0$, где L_1 и L_2 две непропорциональные линейные формы от x и y , а все мономы многочлена $g(x, y)$ имеют степень не менее трех. Пусть $a \in \mathbb{P}^2$ и $a \neq b$. Докажите, что первая поляра $P_a X$ проходит через точку b и неособа в точке b . Как найти касательную прямую $\mathbb{T}_b P_a X$, зная прямые ab , l_1 и l_2 ? (Прямые l_i заданы уравнениями $L_i(x, y) = 0$, $i = 1, 2$.)
- (3) Докажите ассоциативность сложения точек на кубической кривой, определенного на лекции.
- (4) Попробуйте придумать ПРОСТОЕ доказательство того факта, что на любой неособой кубической кривой есть хотя бы три точки перегиба, не лежащие на одной прямой. Как мы выяснили на лекции,

из этого утверждения и анализа систем Штейнера сразу следует, что точек перегиба ровно 9. Известное мне доказательство использует приведение уравнения кривой к Вейштрассовой форме (см. следующий пункт).

- (5) Задачи 2 и 3 из прошлого домашнего задания.
- (6) Задача 6 из прошлого домашнего задания.