Семинар 4

Комплекснозначные формы на плоскости. Операторы i_X, d, L_X (взгляд из алгебры)

1. Пусть $F(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ – комплекснозначная гладкая функция на плоскости. Проверьте,что
$dF(x,y) = \frac{\partial F}{\partial z}dz + \frac{\partial F}{\partial \bar{z}}d\bar{z}.$

2. Проверьте, что теорема Стокса для плоской ограниченной области M, ограниченной (в другом смысле) положительно ориентированной (?) гладкой кривой ∂M, и комплекснозначной 1-формы Fdz принимает вид
$\int\limits_{[M]} dF \wedge dz = \int\limits_{[\partial M]} Fdz.$

3. Покажите, что $dF \wedge dz = 2i\frac{\partial F}{\partial \bar{z}}dx \wedge dy.$

4. Докажите, что для голоморфной функции F: $\int\limits_{\partial M} Fdz = 0.$

5*. (интегральная формула Коши) $F(\tau) = 1/2\pi i \left(\int\limits_{[\partial M]} \frac{F(z)}{z-\tau}dz + \int\limits_{[M]} \frac{\frac{\partial F}{\partial \bar{z}}}{z-\tau}dz \wedge d\bar{z} \right).$

Оператор i_X

6. Проверьте, что оператор подстановки векторного поля X в гладкую форму ω обладает следующими свойствами:
а) $i_{(X+Y)} = i_X + i_Y$;
б) $i_X \circ i_X = 0$;
в) $i_X(\omega_1 \wedge \omega_2) = i_X(\omega_1) \wedge \omega_2 + (-1)^{\deg \omega_1}\omega_1 \wedge i_X(\omega_2)$;
г) $i_X \circ i_Y + i_Y \circ i_X = 0.$

Оператор Ли L_X

Свойство в) означает, что оператор i_X (как и оператор d) является скрученным дифференцированием градуированной алгебры внешних форм на гладком многообразии, понижающим градуировку на 1 (напомним, что оператор d повышает градуировку на 1).

Рассмотрим оператор $L_X = i_X \circ d + d \circ i_X$.

7. Доказать, что оператор L_X является дифференцированием алгебры внешних форм, сохраняющим градуировку.

8. Показать, что оператор L_X коммутирует с операторами i_X, d.

9. Доказать, что $L_X \circ i_Y - i_Y \circ L_X = i_{[X,Y]}$ (воспользоваться тем, что справа и слева стоят операторы скрученного дифференцирования).

10*. Доказать, что $L_{[X,Y]} = [L_X, L_Y]$. Словами: отображение $X \to L_X$ – это гомоморфизм алгебры Ли векторных полей в алгебру Ли дифференцирований алгебры внешних форм.