Проективная и алгебраическая геометрия.

Задачи с семинара 26.01.2024

В пространстве $\mathbb{P}^3$ фиксированы две скрещивающиеся прямые l_1 и l_2 и рассматриваются пучки плоскостей $\check{l}_1$ и $\check{l}_2$, проходящих через эти прямые. Как мы знаем из обсуждения на семинаре, плоскости этих пучков соответствуют точкам прямых $\check{l}_1$ и $\check{l}_2$ в двойственном проективном пространстве $\check{\mathbb{P}}^3$. Зафиксируем проективное отображение $\varphi : \check{l}_1 \to \check{l}_2$. Невырожденная квадрика по Штейнеру Q определяется как множество точек в $\mathbb{P}^3$, образуемое прямыми $\pi \cap \varphi(\pi)$ пересечения пар соответственных плоскостей $\pi \in \check{l}_1$ и $\varphi(\pi) \in \check{l}_2$ в этих пучках, т.е. $Q = \bigcup\limits_{\pi \in \check{l}_1} (\pi \cap \varphi(\pi))$.

Задача 1. Покажите, что через каждую точку $A \in l_1$ проходит ровно одна прямая вида $\pi \cap \varphi(\pi)$, т.е. существует единственная плоскость $\pi \in \check{l}_1$, для которой прямая $\pi \cap \varphi(\pi)$ проходит через точку A, и при этом отображение $\psi : l_1 \to l_2$, сопоставляющее точке $A \in l_1$ точку прямой l_2 $\psi(A) = \pi \cap l_2$, является проективным. Покажите также, что если задано произвольное проективное отображение $\psi : l_1 \to l_2$, то отображение $\varphi : \check{l}_1 \to \check{l}_2$, сопоставляющее плоскости $\pi \in \check{l}_1$ единственную плоскость $\varphi(\pi) \in \check{l}_2$, проходящую через точку $\psi^{-1}(\pi \cap l_2)$, является проективным.

Таким образом, для задания квадрики по Штейнеру задание проективных отображений $\varphi : \check{l}_1 \to \check{l}_2$ и $\psi : l_1 \to l_2$ равносильно.

Задача 2. Покажите, что третья прямая n в пространстве $\mathbb{P}^3$, не пересекающая l_1 и l_2, также задает данные, определяющие квадрику по Штейнеру, т.е. отображения φ и ψ из предыдущей задачи. (Например, отображение ψ определяется тем, что любая точка $C \in n$ лежит на единственной прямой m_C, пересекающей l_1 и l_2, и если $A = m_C \cap l_1$ и $B = m_C \cap l_2$, то $B = \psi(A)$.)

Задача 3. Докажите, что если прямая l в $\mathbb{P}^3$ имеет с квадрикой по Штейнеру Q по крайней мере три различные общие точки, то она лежит на Q.

Задача 4. Напишите уравнение квадрики по Штейнеру, выбрав удобную проективную систему координат в $\mathbb{P}^3$.

Задача 5. Найдите все прямые, лежащие на квадрике $x_0x_3 = x_1x_2$.