Геометрическое введение в алгебраическую геометрию. Весна 2024г

Решения этих задач будут обсуждаться на следующем занятии. Как обычно, внятно записанные (а лучше затеханные) решения нужно присылать на почту alggem23@gmail.com , до 24:00 ВТОРНИКА перед следующим занятием.

Задания с 13 занятия.

(1) На лекции мы доказали, что если X — неприводимая проективная кубическая кривая в $\mathbb{P}^2$, то множество ее неособых точек $X \setminus \operatorname{Sing} X$ является абелевой группой относительно введенной нами операции сложения точек. Докажите, что для полукубической параболы $y^2 = x^3$ и для декартова листа $y^2 = x^2(x+1)$ полученные группы изоморфны, соответственно, аддитивной и мультипликативной группе поля $\mathbb{K}$.

(2) Покажите, что в случае приводимой плоской кубической кривой $X = C \cup l$, где C — неособая коника, а l — прямая, аффинная коника $C \setminus l$ также превращается в абелеву группу относительно введенной нами операции сложения точек, и эта группа изоморфна аддитивной или мультипликативной группе поля $\mathbb{K}$, в зависимости от взаимного расположения C и l.

(3) Покажите, что на неособой кубической кривой подгруппа 4-кручения (т.е. множество точек $a \in X$ таких, что $4a = 0$) изоморфна $(\mathbb{Z}/(4))^2$.

(4) Доделайте обсуждавшееся на занятии доказательство того, что подгруппа 2-кручения на неособой кубике X изоморфна $(\mathbb{Z}/(2))^2$. Мы видели, что при выборе в качестве нуля точки перегиба $a \in X$ точки второго порядка это в точности точки пересечения $X \cap l$, где прямая l это неприводимая компонента распавшейся коники $P_a X$, отличная от касательной прямой $\mathbb{T}_a X$. Осталось доказать, что эта прямая l пересекает X в трех различных точках.

(5) Задачи 2 и 3 из позапрошлого домашнего задания.

(6) Задача 6 из позапрошлого домашнего задания.