Линейные операторы на евклидовых пространствах

ГС11◇1. Можно ли в евклидовом аффинном пространстве $\mathbb{R}^3$ перевести прямые

$$\begin{cases} -2x_1 - 5x_2 + 5x_3 = 19 \\ 4x_1 + 4x_2 - 7x_3 = -29 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} -x_1 + 11x_2 - 2x_3 = -10 \\ -7x_1 - 7x_2 + 10x_3 = 26 \end{cases}$$

соответственно в прямые

а) $\begin{cases} 10x_1 - 5x_2 - x_3 = -22 \\ -22x_1 + 14x_2 + 7x_3 = 37 \end{cases}$ и $\begin{cases} -35x_1 + 19x_2 + 14x_3 = -7 \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 2 \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10 \\ -8x_1 + 4x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$ и $\begin{cases} -7x_1 - 7x_2 - 10x_3 = -29 \\ 8x_1 + 5x_2 + 8x_3 = 25 \end{cases}$

подходящим движением? Если нет, объясните, почему. Если да, явно напишите, как это движение действует на стандартный координатный репер.

ГС11◇2. Найдите ортогональные проекции вектора $(1, 2, -1, 1) \in \mathbb{R}^4$ на

а) пространство решений системы уравнений $x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0$

б) линейную оболочку векторов $(1, 0, 2, -3)$ и $(2, -1, 0, 3)$

а также на ортогональные дополнения к этим подпространствам.

ГС11◇3. Напишите матрицы ортогональных проекторов евклидова пространства $\mathbb{R}^4$ на все четыре подпространства из предыдущей задачи в стандартном базисе пространства $\mathbb{R}^4$ и каких-нибудь (на Ваш выбор) базисах в этих подпространствах.

Терминология. Операторы $F, F^\times : V \to V$ на евклидовом пространстве V называются *сопряжёнными*, если $(Fu, w) = (u, F^\times w)$ для всех $u, w \in V$. Самосопряжённый оператор S (т. е. такой, что $S^\times = S$) называется *положительным*, если $(v, Sv) > 0$ для всех ненулевых $v \in V$. Каждый самосопряжённый оператор S обладает ортогональным базисом из собственных векторов, и положительность S равносильна положительности всех его собственных чисел. Каждое линейное отображение $F : U \to W$ между евклидовыми пространствами U, W единственным образом раскладывается в композицию $F = GSP$, где $P : U \twoheadrightarrow V$ — ортогональная проекция на ортогонал $V \stackrel{\text{def}}{=} (\ker F)^\perp \subset U$ к ядру отображения F, $S : V \to V$ — положительный самосопряжённый оператор, $G : V \hookrightarrow W$ — ортогональное[1] вложение. Собственные числа и попарно ортогональные собственные векторы оператора S называются, соответственно, *сингулярными числами* и *сингулярными направлениями* исходного отображения $F : U \to W$.

ГС11◇4. Докажите, что $(FG)^\times = G^\times F^\times$, $F^{\times\times} = F$, $\ker F^\times = (\operatorname{im} F)^\perp$ и $\operatorname{im} F^\times = (\ker F)^\perp$.

ГС11◇5. Рассмотрим на пространстве V гладких функций $[0, 1] \to \mathbb{R}$, зануляющихся на концах отрезка вместе со всеми своими производными, скалярное произведение

$$(f, g) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^1 f(t)g(t)\, dt\,.$$

Опишите линейные операторы $V \to V$, сопряжённые к

а) оператору дифференцирования $f \mapsto f'$

б) оператору умножения на фиксированную функцию $g : f \mapsto fg$

в) дифференциальному оператору $x\frac{d^2}{dx^2} + x^2\frac{d}{dx} + 1 : f(x) \mapsto xf''(x) + x^2 f'(x) + f(x)$.

ГС11◇6. Найдите ортогональные собственные базисы следующих самосопряжённых операторов $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, заданных своими матрицами в стандартном ортонормальном базисе:

а) $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/2 & 1 & 2 \\ -3/2 & 1/2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1/2 & -3/2 \\ 2 & 1 & -3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ **б)** $\begin{pmatrix} 4/5 & 6/5 & 4/5 & 6/5 \\ 6/5 & -1 & -12/5 & -4/5 \\ 4/5 & -12/5 & 13/5 & 0 \\ 6/5 & -4/5 & 0 & 13/5 \end{pmatrix}$

[1] Т. е. такое, что $(Gv_1, Gv_2) = (v_1, v_2)$ для всех $v_1, v_2 \in V$.

в) $\begin{pmatrix} 1/2 & -5/6 & -2/3 & 2 \\ -5/6 & -13/6 & 0 & 0 \\ -2/3 & 0 & -17/6 & -1/2 \\ 2 & 0 & -1/2 & -3/2 \end{pmatrix}$ г) $\begin{pmatrix} 9/4 & -1/4 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 9/4 & 1/4 & 1/4 \\ -1/4 & 1/4 & 9/4 & 1/4 \\ -1/4 & 1/4 & 1/4 & 9/4 \end{pmatrix}$

ГС11⋄7. Найдите полярное разложение $f = gh$, где g — ортогонален, а h — самосопряжён и положителен, биективного линейного оператора f на евклидовом пространстве, имеющего в стандартном ортонормальном базисе матрицу

а) $\begin{pmatrix} 4/3 & -2/3 & -4/3 \\ -1/3 & 2/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} -1 & -2/3 & 4/3 \\ 4/3 & -2 & 1/3 \\ 2/3 & -2/3 & 2 \end{pmatrix}$ в) $\begin{pmatrix} 0 & -2/7 & -2 & 4/7 \\ -1 & -3/7 & 1 & 13/7 \\ 2 & -2/7 & 0 & 4/7 \\ 1/2 & -31/14 & -1/2 & -15/14 \end{pmatrix}$

ГС11⋄8. Найдите ядро, сингулярные числа, сингулярные направления и образы сингулярных направлений оператора $f:\ \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ с матрицей

а) $\begin{pmatrix} -5 & 4 & -2 & -2 \\ 2 & 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} -12 & -7 & -4 & -4 \\ -6 & 24 & -12 & -12 \end{pmatrix}$ в) $\begin{pmatrix} -10 & 8 & -4 & -12 \\ 2 & 2 & 8 & -3 \end{pmatrix}$

ГС11⋄9*. Существует ли в $\mathrm{SO}_4(\mathbb{R})$ оператор, переводящий подпространства

$$x_1 + x_2 - x_3 = x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \quad \text{и} \quad 2x_1 - x_3 - 3x_4 = x_1 - x_3 + 3x_4 = 0$$

соответственно в подпространства

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \quad \text{и} \quad 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0\,?$$

ГС11⋄10*. Найдите экстремумы функции $S^{n-1} \to \mathbb{R}$, $v \mapsto (v, fv)$, где $f:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — самосопряжённый линейный оператор, а $S^{n-1} = \{v \in \mathbb{R}^n \mid (v,v) = 1\}$ — единичная сфера.