Евклидова геометрия

ГЛ7⋄1. Три вектора в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ таковы, что все скалярные произведения между ними неотрицательны. Всегда ли найдётся такой ортонормальный базис в $\mathbb{R}^3$, что все три эти вектора окажутся в одном координатном октанте?

ГЛ7⋄2. Какое максимальное число векторов можно выпустить из начала координат n-мерного евклидова пространства так, чтобы все попарные углы между ними были тупыми?

ГЛ7⋄3. Сколько трёхмерных плоскостей симметрии у четырёхмерного куба?

ГЛ7⋄4. В стандартном n-мерном симплексе $\Delta_n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum x_i = 1,\ x_i \geqslant 0\}$ найдите

а) угол между ребром и противолежащей ему $(n-2)$-мерной гранью[1]

б) расстояние между не пересекающимися гранями размерностей k и m.

ГЛ7⋄5* (октаплекс). Нарисуем в $\mathbb{R}^4$ стандартный куб I^4 и гомотетичный стандартному кокуб, все вершины которого лежат на описанной вокруг I^4 сфере. Выпуклая оболочка вершин куба и кокуба называется *октаплексом*. Подсчитайте у него

а) количество граней в каждой из размерностей

б) длины рёбер и радиус вписанного шара

и выясните,

в) как выглядят трёхмерные гиперграни и каковы их объёмы

г) как выглядят двумерные грани и каковы их площади.

ГЛ7⋄6 (движения евклидова пространства $\mathbb{R}^3$). Пусть τ_v, σ_π и $\varrho_{v,\varphi}$ обозначают, соответственно, сдвиг на вектор v, отражение в плоскости π и поворот вокруг прямой с направляющим вектором v на угол φ против ЧС, если глядеть вдоль v. Выясните, когда имеют место написанные ниже равенства, и во всех случаях, когда они верны, выразите параметры движения в правой части через параметры движений из левой:

а) $\sigma_{\pi_1} \circ \sigma_{\pi_2} = \varrho_{v,\varphi}$ **б)** $\sigma_{\pi_1} \circ \sigma_{\pi_2} = \tau_v$ **в)** $\sigma_\pi \circ \varrho_{u,\varphi} \circ \sigma_\pi = \varrho_{v,\psi}$

г) $\varrho_{u,\varphi} \circ \varrho_{w,\psi} = \tau_v \circ \varrho_{v,\vartheta}$ **д)** $\varrho_{u,\varphi} \circ \sigma_\pi \circ \varrho_{u,-\varphi} = \sigma_{\pi_2}$ **е)** $\varrho_{u,\varphi} \circ \sigma_{\pi_1} = \sigma_{\pi_2}$

ж) $\tau_{u_2} \circ \sigma_{\pi_2} \circ \tau_{u_1} \circ \sigma_{\pi_1} = \tau_v \circ \varrho_{v,\varphi}$, где каждый вектор сдвига u_i параллелен соответствующей плоскости отражения π_i.

ГЛ7⋄7. Обозначим через ϱ_{AB} поворот трёхмерного евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ на угол π вокруг прямой AB, а через σ_{ABC} — отражение в плоскости ABC. Пусть точки A, B, C, D являются вершинами правильного тетраэдра. Опишите движение[2]

а) $\varrho_{AD} \circ \varrho_{AC} \circ \varrho_{AB}$ **б)** $\sigma_{ADB} \circ \sigma_{ACD} \circ \sigma_{ABC}$.

ГЛ7⋄8. Чему равна композиция отражений $\sigma_{e_1}\sigma_{e_2}\, \dots\, \sigma_{e_n}$ евклидова координатного пространства $\mathbb{R}^n$ в стандартных координатных гиперплоскостях $e_i^\perp$ при $n = 2, 3, \dots$?

ГЛ7⋄9. Убедитесь, что векторное произведение $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ кососимметрично[3], и не ассоциативно, но удовлетворяет *правилу Лебница*[4] $u \times (v \times w) = (u \times v) \times w + v \times (u \times w)$.

ГЛ7⋄10. Докажите для векторных произведений в $\mathbb{R}^3$ равенства

а) $\big[a, [b, c]\big] = b \cdot (a, c) - c \cdot (a, b)$

б) $\big[[a, b], [a, c]\big] = a \cdot \det(a, b, c)$

в) $\big([a, b], [c, d]\big) = \det \begin{pmatrix} (a, c) & (a, d) \\ (b, c) & (b, d) \end{pmatrix}$.

---

[1] Т. е. аффинной оболочкой $n-1$ вершин, не являющихся концами этого ребра.

[2] Если это отражение, то в какой плоскости, если поворот — вокруг какой оси и на какой угол.

[3] Т. е. $v \times v = 0$ для всех v.

[4] Которое часто записывают в виде $[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0$ и называют *тождеством Якоби*.