**12 задач для подготовки к контрольной 1 марта**

1. Пусть $C$ – кривая $r = \sin\theta$, $0 \le \theta \le \pi$. Вычислить $\int\limits_C dx + dy$.

2. Вычислить поток векторного поля $\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$ в $E^3$ через поверхность сферы $x^2+y^2+z^2 = 16$, ориентированной внешней нормалью.

3. Вычислть в $E^3$ площадь пересечения сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ с полупространством $z \ge 1$.

4. В $\mathbb{R}^3$ задана поверхность $S$: $x = (a + b\cos\phi)\cos\theta$, $y = (a + b\cos\phi)\sin x\theta$, $z = b\sin\phi$, $a > b > 0$, $0 \le \theta$, $\phi \le 2\pi$. Вычислить $\int\limits_S zdx \wedge dy$.

5. В трехмерном евклидовом пространстве с стандартной ориентирующей формой в ортонормированном базисе рассмотрим векторное поле $F$ с координатами $(yz, xz, xy)$. Вычислить: $\mathrm{rot}F, \mathrm{div}F, \mathrm{div}(\mathrm{rot}F), \mathrm{rot}(\mathrm{rot}F)$, $\mathrm{grad}(\mathrm{div})$.

6. Во что перейдет дифференциальная 2-форма $xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy$ в трехмерном евклидовом пространстве с стандартной ориентирующей формой в ортонормированном базисе, если применить к ней оператор $* \circ d \circ *$?

7. Докажите, что дифференциальная 2-форма $xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy$ инвариантна относительно группы $SO(3)$.

8. На бесконечном цилиндре $H : X^2 + Y^2 = 4$ в $E^3$ действует группа $G$, порожденная инволюцией $(x, y, z) \to (-x, -y, -z)$. Доказать, что факторпространство $H/G$ является гладкой неориентируемой поверхностью.

9. Найти все дифференциальные 1-формы на стандартной сфере в $E^3$, инвариантные относительно группы SO(3).

10. Как, обладая скромными знаниями, разумно и корректно проинтегрировать непрерывную функцию по компактному ориентированному многообразию?

11. Сформулировать и доказать теорему Гаусса-Фарадея о потоке электрического поля неподвижного точечного заряда через гладкую замкнутую поверхность в $E^3$.

12. Рассмотрим в $E^3$ многообразие с краем $M : X^2 + Y^2 \le Z^2$, $0 < Z < 1$ . Постройте атлас стандартной гладкой структуры на $M$. Существует ли атлас из двух карт? Из трех карт?...