

## Геометрическое введение в алгебраическую геометрию. Весна 2024г

Решения этих задач будут обсуждаться на следующем занятии. Как обычно, внятно записанные (а лучше затеханные) решения нужно присылать на почту [alggem23@gmail.com](mailto:alggem23@gmail.com), до 24:00 ВТОРНИКА перед следующим занятием.

### Задания с 14 занятия.

- (1) Опишите всевозможные пучки коник в  $\mathbb{P}^2$ , в которых все коники особые.
- (2) Пусть точка  $a \in \mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V)$  ( $V$  — векторное пространство над полем  $\mathbb{K}$ ,  $\dim V = n + 1$ ). Постройте естественный (не зависящий от выбора системы координат) изоморфизм между касательным векторным пространством  $T_a\mathbb{P}^n$  и факторпространством  $V / \langle a \rangle$  ( $\langle a \rangle$  — одномерное векторное пространство, порожденное вектором  $a$ ).
- (3) Пусть  $X$  — аффинное многообразие,  $a \in X$ ,  $U \subset X$  — аффинная окрестность точки  $a$ . Пусть  $A$  это одно из колец  $\mathbb{K}[X]$ ,  $\mathbb{K}[U]$ ,  $\mathcal{O}_{a,X}$  (локальное кольцо точки  $a$  на  $X$ ),  $m_a$  — максимальный идеал, состоящий из функций из  $A$ , обращающихся в нуль в точке  $a$ . Покажите, что  $m_a/m_a^2$  и  $A/m_a^n$  изоморфны при всех трех приведенных вариантах выбора кольца  $A$ .
- (4) Покажите, что если  $a$  — неособая точка плоской кривой, то пополнение локального кольца этой точки по ее максимальному идеалу изоморфно кольцу формальных степенных рядов  $\mathbb{K}[[t]]$ .
- (5) Докажите, что пополнение локального кольца начала координат на особой аффинной кривой, заданной уравнением  $xy = 0$ , изоморфно подкольцу декартова произведения  $\mathbb{K}[[s]] \times \mathbb{K}[[t]]$ , состоящему из таких пар  $(P(s), Q(t)) \in \mathbb{K}[[s]] \times \mathbb{K}[[t]]$ , что  $P(0) = Q(0)$ .