Семинар 3.

Во всех задачах $\mathbf{k} = \overline{\mathbf{k}}$, $\operatorname{char} \mathbf{k} \neq 2$, и Q – невырожденная квадрика в $\mathbb{P}^3$. Через S_1 и S_2 будем обозначать два семейства образующих прямых на квадрике Q.

Задача 1. В условиях задачи 5 к семинару 2 пусть точка $a \in \mathbb{P}^3$ не лежит на квадрике Q, так что коника $D = p_aQ \cap Q$ невырождена. Рассмотрим линейную проекцию из точки a на плоскость p_aQ, то есть отображение $\pi : \ \mathbb{P}^3 \setminus \{a\} \to p_aQ, \ x \mapsto \langle a, x\rangle \cap p_aQ$. Опишите семейства прямых в плоскости p_aQ, в которые отображаются семейства S_1 и S_2 образующих прямых квадрики Q при проекции π.

Задача 2. На семинаре 3 мы рассмотрели *поляритет относительно квадрики* Q как проективное отображение

$$p_Q : \ \mathbb{P}^3 \xrightarrow{\sim} \check{\mathbb{P}}^3, \quad x \mapsto p_xQ,$$

где p_xQ - поляра точки x относительно квадрики Q, и построили отображение в себя множества прямых в $\mathbb{P}^3$, сопоставляющее прямой l прямую p_lQ, называемую *полярой прямой l относительно квадрики Q*, где

$$p_lQ = \bigcap_{a \in l} p_aQ.$$

1) Проверьте, что $p_lQ = \bigcap\limits_{b \in p_Q(l)} \check{b}$.
2) Пусть $a \in l \subset \mathbb{P}^3$. Как связаны между собой поляры p_aQ и p_lQ?
3) Пусть l – прямая в $\mathbb{P}^3$ и $m = p_lQ$. Докажите, что $p_mQ = l$.

Задача 3. Пусть l – прямая в $\mathbb{P}^3$.
Пользуясь сериями S_1 и S_2 образующих прямых на квадрике Q, постройте поляру p_lQ прямой l отноительно квадрики Q в следующих случаях:
1) $l \cap Q = \{b_1, b_2\}$ – пара различных точек.
2) $l \cap Q = \{b\}$ – точка.
3) $l \subset Q$.

Задача 4. Рассмотрим две тройки различных прямых $a, \ c, \ e \in S_1$ и $b, \ d, \ f \in S_2$ и обозначим точки $A = a \cap b, \ B = b \cap c, \ C = c \cap d, \ D = d \cap e, \ E = e \cap f, \ F = f \cap a$. Эти точки образуют пространственный 6-вершинник $ABCDEF$. Докажите, что главные диагонали AD, BE, CF этого пространственного 6-вершинника пересекаются в точке.

Задача 5. Выведите из задач 1 и 4 теорему Брианшона.