

# Механика 2024

## ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ № 3

Срок сдачи задания: до конца дня **26.02.24**

---

1. Компоненты силы  $\vec{F}$  заданы в сферических координатах  $r$ ,  $\theta$  и  $\phi$  на  $\mathbb{R}^3$ :

$$F_r = -2r \cos \phi \sin 2\theta, \quad F_\theta = -2r \cos \phi (1 + \alpha \sin^2 \theta), \quad F_\phi = -\alpha r \cos \theta \sin \phi,$$

где  $\alpha$  — вещественный параметр. Определите, при каких значениях  $\alpha$  сила потенциальна, и найдите соответствующую функцию потенциальной энергии.

2. Компоненты силы  $\vec{F}$  заданы в цилиндрических координатах  $\rho$ ,  $\phi$  и  $z$  на  $\mathbb{R}^3$ :

$$F_\rho = \rho X(z) \cos \phi, \quad F_\phi = \rho Y(\phi) e^{-z^2}, \quad F_z = V(\rho, \phi) z e^{-z^2},$$

где  $X$ ,  $Y$  и  $V$  — произвольные гладкие функции.

а) При каких  $X$ ,  $Y$  и  $V$  выполнены необходимые условия потенциальности  $\vec{F}$ ? Найдите общее решение.

б) Определите вид потенциальной силы  $\vec{F}$ , если дополнительно заданы граничные условия:

$$\vec{F}|_{\rho=0} = 0 \quad (\text{на оси } O\vec{z}), \quad F_\rho|_{\phi=z=0} = \rho \quad (\text{на оси } O\vec{x}).$$

Постройте соответствующую функцию потенциальной энергии и проверьте достаточные условия потенциальности.

3. В цилиндрических координатах пространства  $\mathbb{R}^3$  компонента  $F_\phi$  потенциальной силы  $\vec{F}$  имеет вид:

$$F_\phi = f(\rho, z) \cos \phi,$$

где  $f(\rho, z)$  — гладкая функция. Определите наиболее общий возможный вид остальных компонент силы  $\vec{F}$  и вычислите соответствующий потенциал.

4. Тангенциальное силовое поле в сферических координатах на  $\mathbb{R}^3$  имеет вид:

$$\vec{F} = F_\theta \vec{e}_\theta + F_\phi \vec{e}_\phi.$$

Иными словами, в любой точке  $\mathbb{R}^3$  вектор силы  $\vec{F}$  ортогонален радиус-вектору  $\vec{r}$ .

а) Приведите пример тангенциального поля, которое потенциально. Найдите общий вид тангенциальной потенциальной силы.

б) Существует ли потенциальное тангенциальное поле, которое в точках экватора сферы радиуса  $r$  (т.е. при  $\theta = \pi/2$ ) имеет ненулевую компоненту  $F_\phi(r)$ , не зависящую от угла  $\phi$ ?

5. Массивная частица движется без трения по поверхности кругового конуса

$$z^2 = x^2 + y^2.$$

К частице прикреплена невесомая пружина, коэффициент упругости которой равен  $\kappa$ . Второй конец которой свободно скользит по оси  $O\vec{z}$ , причем пружина остается перпендикулярной к оси  $O\vec{z}$  при любых движениях частицы. Потенциальная энергия упругой деформации пружины дается формулой  $U = \kappa \ell^2/2$ , где  $\ell$  — длина пружины. Силы тяжести в системе не действуют.

- а) Выбрав подходящие обобщенные координаты, составьте лагранжиан этой системы.
- б) Выпишите уравнения движения частицы — уравнения Эйлера-Лагранжа.
- в) Есть ли в системе сохраняющиеся величины — интегралы движения? Если есть, приведите их явный вид в выбранных обобщенных координатах.