Группы, Алгебры, Представления — Напоминание

G — группа конечная

A — конечномерн. алгебр над алг. замкнутым полем $\mathbb{K}$ ($\mathbb{C}$)

V — лин. пространство над $\mathbb{K}$

Выбран базис в V

Группа $\mathrm{Aut}(V)$ — обратимые преобр V ⟷ обратим. матрицы

Алгебра $\mathrm{End}(V)$ — лин. преобр. V ⟷ ∀ матрицы

Представление ρ_V гр. G (алг. A) на пространстве V — гомоморфизм

$$G\ (A) \xrightarrow{\rho_V} \mathrm{Aut}\,V\ \ (\mathrm{End}\,V)$$

$$\forall a, b \in A \qquad \boxed{\rho_V(a\cdot b) = \rho_V(a)\cdot\rho_V(b)}$$

лин. структура тоже сохраняется при ρ_V

Изоморфные представления $\rho_V \cong \rho_{V'}$

$\mathrm{Hom}_A(V, V')$: $\quad V \xrightarrow{\varphi} V'$ $\quad\varphi$ — обратимо

и диаграмма

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\rho_V(a)"'] & V' \arrow[d, "\rho_{V'}(a)"] \\
V \arrow[r, "\varphi"] & V'
\end{tikzcd}$$

коммутативна $\forall a \in A$

Эквивалентная формулировка:

$$\boxed{\varphi(\rho_V(a)v) = \rho_{V'}(a)(\varphi(v))} \quad \forall v \in V \quad \forall a \in A$$

Если выбран базис в V:

$\rho_V(a) \longmapsto \Lambda_a \leftarrow$ матрицы.

$\varphi \longmapsto \Phi \swarrow$

$\rho_{V'}(a) \longmapsto \Phi\Lambda_a\Phi^{-1}$

Подпредставление ρ_U в ρ_V:

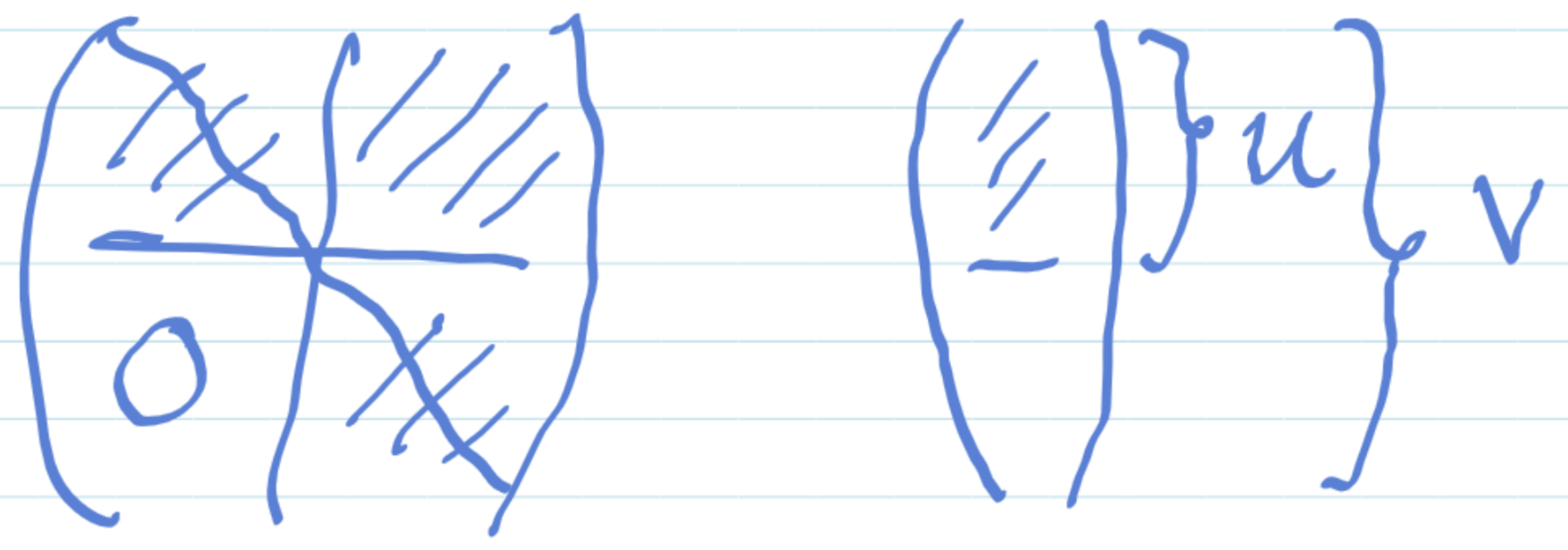
$$U \subset V$$

$$\forall\, a \in A \qquad \rho_U(a)\, U \subset U$$

A-инвариантное подпространство

Если выбран базис в V, согласованный с U

$$a \in A \longmapsto \Lambda_a =$$



Неприводимое представление $\Longleftrightarrow$ нет нетривиальных подпредставлений

Критерии неприводимости:

а) $\forall\, v \in V$ — циклический, т.е.

$$\forall a \in A \quad \rho_V(a) \cdot v = V$$

б) $A \xrightarrow{\rho} \operatorname{End} V$ — эпиморфизм

$$\operatorname{Im} \rho_V = \operatorname{End} V$$

Выберем в V базис $\{v_i\}_{i=1\ldots n}$ $\quad \dim V = n$

$$\operatorname{End} V \cong \operatorname{Mat}_n(\mathbb{K})$$

Базис матричных единиц в End(V):

$$E_{ij} = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} \quad & j & \quad \end{matrix} \\ i & \begin{pmatrix} 0 & \vert & 0 \\ - & \textcircled{1} & - \\ 0 & \vert & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad v_k = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \\ k \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \end{array}$$

Vec$_n$ $\qquad E_{ij}\, v_k = \delta_{jk}\, v_i \qquad (*)$

Mat$_n$ $\qquad E_{ij}\, E_{kl} = \delta_{jk}\, E_{il} \qquad \dim \operatorname{Mat}_n = n^2$

Утв.: $\boxed{\exists!\ \text{нетривиальное неприводимое представление } \operatorname{Mat}_n. \text{ Это } \operatorname{Vec}_n\ (*).}$

Mat_n — простая алгебра

Def A – простая, если $\forall a \neq 0$ $\underbrace{AaA}_{\text{двусторонний идеал}} = A$

Т.е. в A $\nexists$ нетривиальных двусторонних идеалов.

Утв: $\forall$ простая алг. A над алг. замкнутым полем $\mathbb{K}$ изоморфна $Mat_n(\mathbb{K})$ при некотором значении n.

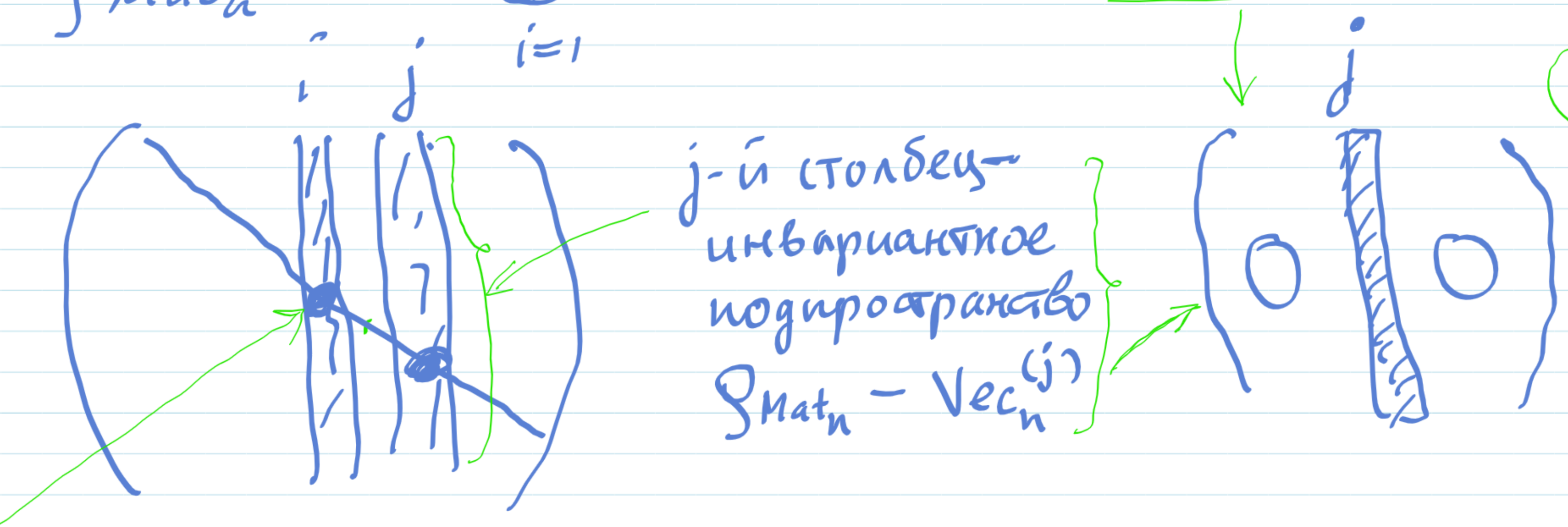
Def регулярное представление ρ_A:

Обозначаем:
$$\begin{array}{ccc} V & = & A \\ \cup & & \cup \\ \vec{a} & \leftrightarrow & a \end{array}$$

$$\boxed{\rho_A(a)\cdot\vec{b} = \vec{a\cdot b}}$$ ← умножение слева в A.

$$\rho_{Mat_n} = \bigoplus_{i=1}^{n} Vec_n^{(i)}$$

$$\boxed{Vec_n^{(j)}} = Span(\underbrace{E_{kj}}_{v_k}\ \forall k)$$



j-й столбец – инвариантное подпространство $\rho_{Mat_n} - Vec_n^{(j)}$

E_{ii} — диагональная матричная единица – идемпотент

$$\left[\begin{array}{l} E_{ii}^2 = E_{ii} \\ E_{ii}E_{kk} = \delta_{ik}E_{kk} \end{array}\right\}$$ $\{E_{ii}\}_{1\le i\le n}$ полный набор взаимно ортогональных примитивных идемпотентов

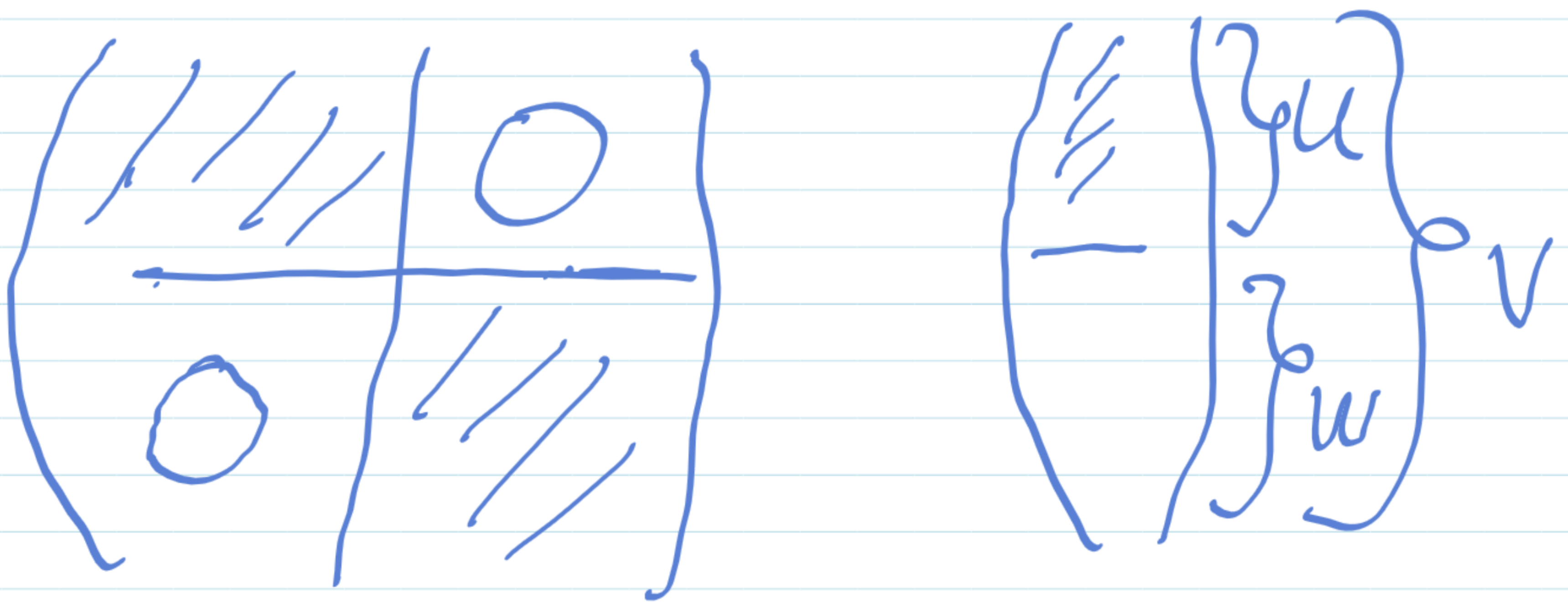
Def. Идемпотент e примитивен, если $\nexists$ e_1, e_2 :

$$e = e_1 + e_2,\quad e_1^2 = e_1,\ e_2^2 = e_2,\ e_1e_2 = e_2e_1 = 0$$

Def: Набор $\{e_i\}$ примитивных взаимно ортогональных идемпотентов полон в A, если

$$\boxed{\mathbb{1}_A = \sum_i e_i}$$ ← пирсовское разложение единицы в A.

Приводимое представление V разложимо, если $V = U \oplus W$:



Представление ρ_V вполне приводимо, если $V = \bigoplus_i V_i$, где ρ_{V_i} — неприводимы.

Теорема Машке (1898)

$\forall$ представление G над $\mathbb{K}$: char $\mathbb{K}$ не делит $|G|$ вполне приводимо

$\Downarrow$

Def. Групповая алгебра $\mathbb{K}[G]$: $\ni a = \sum_{i=1}^{|G|} \overset{\mathbb{K}}{\overset{\Downarrow}{\alpha_i}} g_i \quad g_i \in G$

$$a \cdot b = \left(\sum_i \alpha_i g_i\right)\left(\sum_j \beta_j g_j\right) = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j (g_i \cdot g_j).$$

Теорема Машке в применении к $\mathbb{K}[G]$:

$$\boxed{\mathbb{K}[G] \text{ — полупроста}}$$

Def: Алгебра полупроста, если любое ее представление вполне приводимо.

Def: A — полупроста, если ее радикал — $\operatorname{rad} A = 0$.

$\operatorname{rad} A$ — двусторонний идеал в A, состоящий из существенно нильпотентных элементов x:

$$\underbrace{A x A x A \ldots x A}_{\text{количество эл-тов } x \text{ конечно.}} = 0$$

Для $\forall$ неприводимого представления ρ_V алг. A $\operatorname{rad} A \subset \operatorname{Ker} \rho_V$,

Фактор-алгебра $A / \operatorname{Rad} A$ — полупроста

Теорема Веддербёрна–Артина (1907–1927) $\mathbb{K}$ – алг. замкнуто

эквивалентн. утверждения

а) A – полупроста ($\mathrm{Rad}\,A = 0$)

$\Updownarrow$

б) $\forall$ представление ρ_V алг. A вполне приводимо

$\Updownarrow$

в) $$\boxed{A \cong \mathrm{Mat}_{n_1}(\mathbb{K}) \times \mathrm{Mat}_{n_2}(\mathbb{K}) \times \ldots \times \mathrm{Mat}_{n_k}(\mathbb{K})}$$

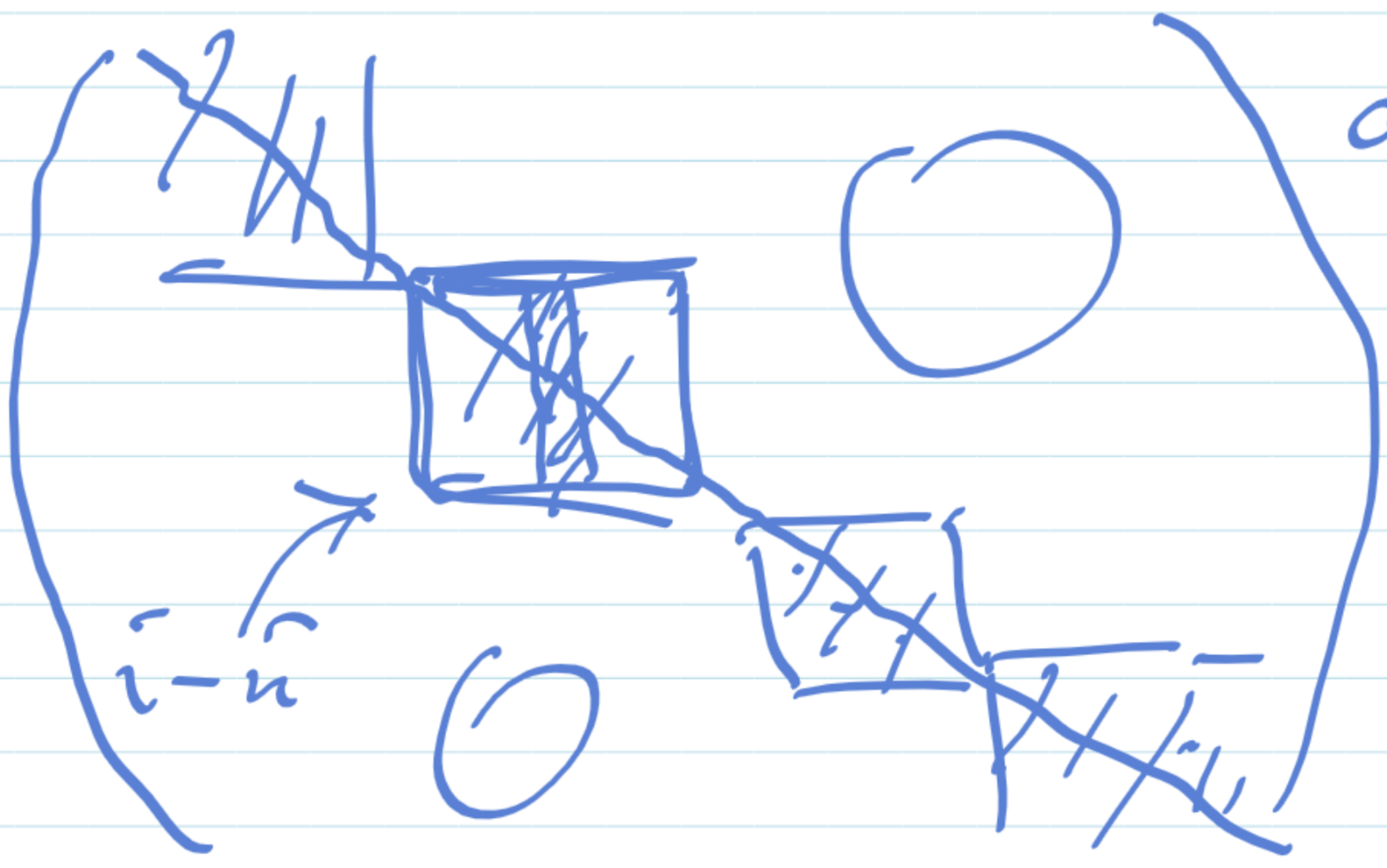
набор $(n_1, n_2 \ldots n_k)$ – численные инварианты A

$\Updownarrow$

г) регулярное предст A

$$\boxed{\rho_A = \bigoplus_{i=1}^{k} n_i \cdot \mathrm{Vec}_{n_i}(\mathbb{K})}$$

полупростая A <=>



алгебра блочно-диагональных матриц.

Следствие

$$\boxed{\dim A = \dim \rho_A = \sum_i n_i^2}$$

размерности всех неэквивалентных неприводимых представлений A.

Неприводимые представления характеризуются леммой Шура (1905)

Пусть U и V – пр-ства неприводимых представлений ρ_U и ρ_V алгебры A над $\mathbb{K}$

$$\rho_U \not\cong \rho_V \iff \mathrm{Hom}_A(U, V) = 0$$

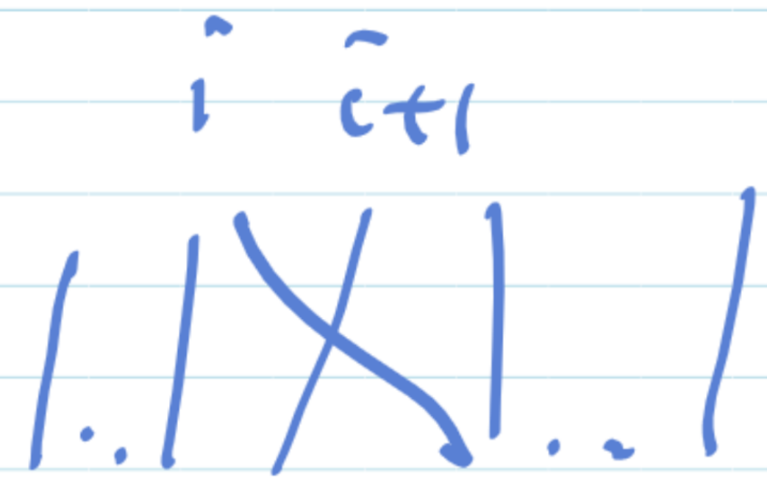
Если $\mathbb{K}$ алг. замкнуто: $\boxed{\mathrm{Hom}_A(V, V) = \mathbb{K}\cdot \mathrm{Id}_V}$

$\Downarrow$ Следствие

$$\forall\, a \in \underbrace{Z(A)}_{\text{центр } A} \quad \underbrace{\rho_V}_{\text{неприводимое}}(a) = \underbrace{c_a}_{\text{числа, характеризующие представление } \rho_V} \mathrm{Id}_V$$

Симметрическая группа S_n (напоминание)

Def: порождается σ_i, $i=1\dots n-1$ $\sigma_i =$



$$\begin{cases} \sigma_i^2=1, & (\sigma_i\sigma_j)^2=1 \quad |i-j|>1 \\ (\sigma_i\sigma_{i+1})^3=1 \end{cases}$$

#ребр$(i,j)=m_{ij}$: $(\sigma_i\sigma_j)^{m_{ij}+2}=1$

$\# S_n = n!$

$\mathbb{C}[S_n]$ — полупроста

Башня групп/алгебр

$$1 = S_1 \subset S_2 \subset S_3 \subset \dots \subset S_i \subset S_{i+1} \subset \dots \subset S_n$$

(добавить еще генератор σ_i + соотн. на него

С ней связаны 2 процедуры на представлениях:

1) **Редукция**: $\rho_V^{(S_{i+1})} = \bigoplus\limits_\alpha \rho_{V_\alpha}^{(S_i)}$, $V = \bigoplus\limits_\alpha V_\alpha$

2) **Индукция**: В общей ситуации $A \supset B$ — подалгебра

U — пространство представления алгебры B : $\rho_U^{(B)}$

$V = \rho_A \underset{B}{\otimes} U$ — пр-ство индуцированного представления $\mathrm{Ind}_B^A \rho_U = \rho_V^{(A)}$

В частном случае, когда $A = S_{i+1}$, $B = S_i$, $\{v_\alpha\}$ — базис в пр-стве U представления S_i — $\rho_U^{(S_i)}$, имеем

$\{v_\alpha, \sigma_i v_\alpha, \sigma_{i-1}\sigma_i v_\alpha, \dots, \sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_i v_\alpha\}$ — базис индуцированного представления $\mathrm{Ind}_{S_i}^{S_{i+1}} \rho_U$, причем $\dim_V = (i+1)\cdot \dim U$

Неприводимые представления S_n нумеруются разбиениями

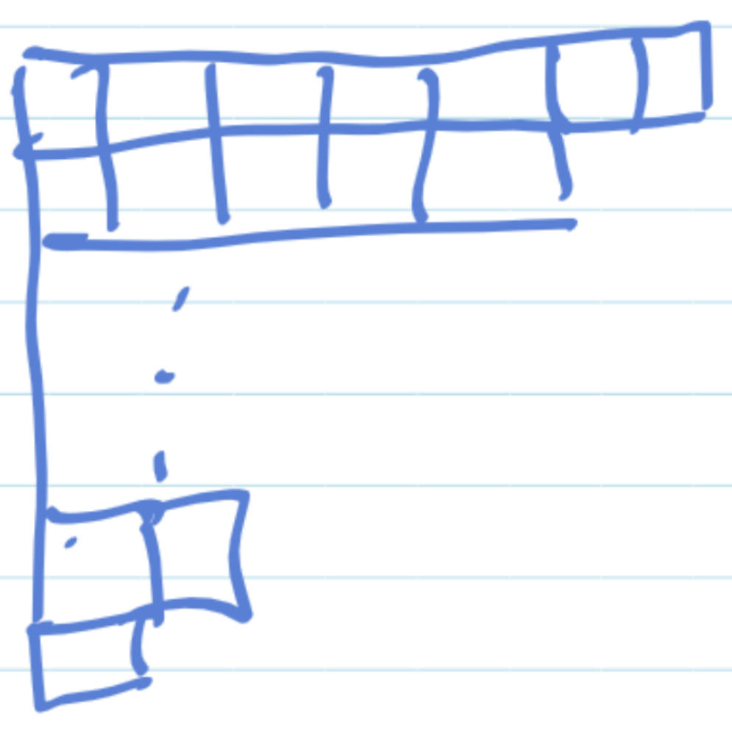
$V_{\lambda \vdash n}$

$$\lambda := (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_k \geq 0)$$

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = n, \quad \lambda_i \in \mathbb{N}.$$

$\Updownarrow$ диаграмма Юнга

\# клеток $= \lambda_i$ в ряду i



S_1 $\lambda = (1)$ $\longrightarrow$ $V_{\square}$ – трив. предст.

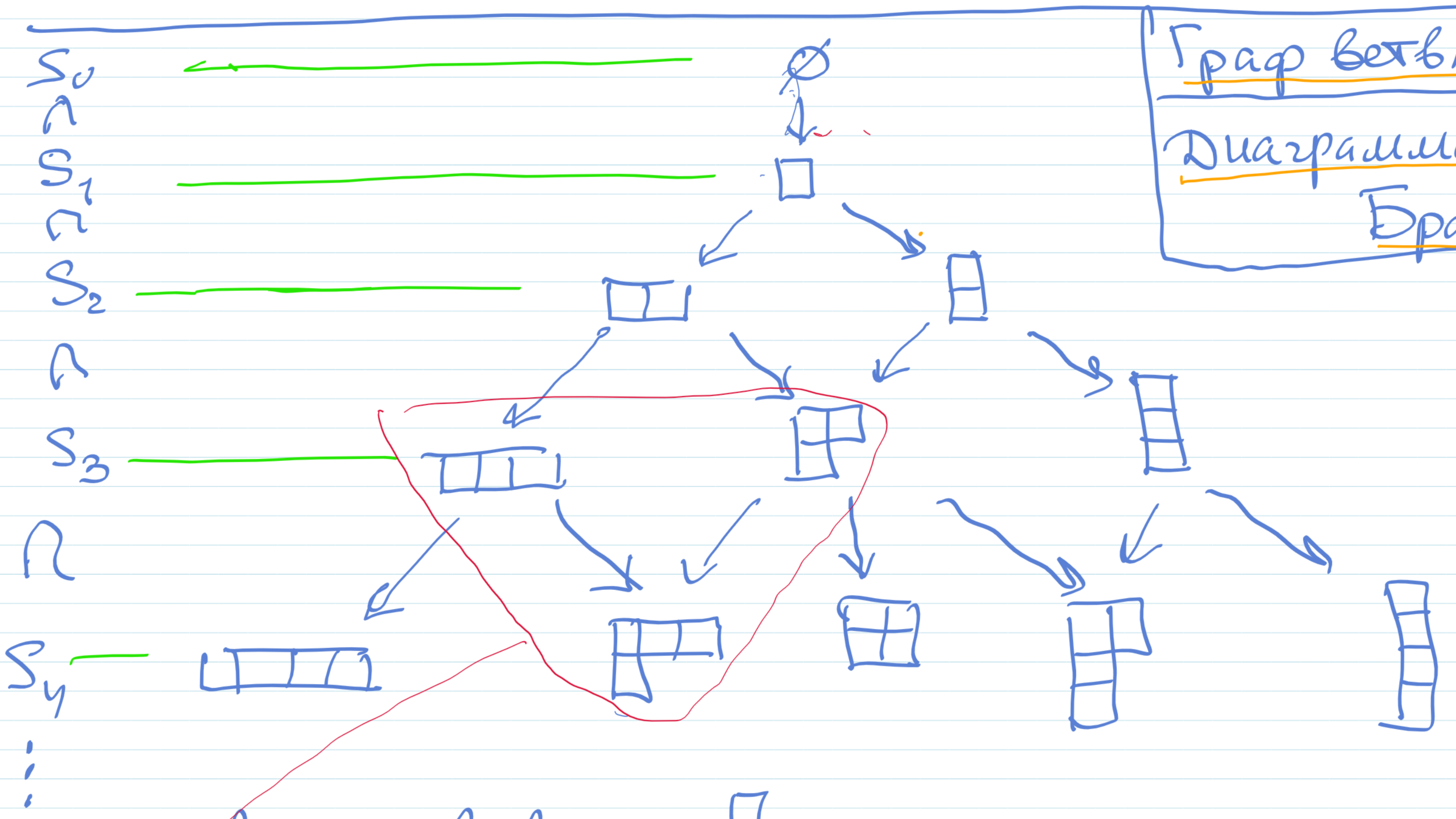
S_2 $\lambda : (2)\ (1,1)$ $V_{\square\square}$ $V_{\substack{\square\\ \square}}$ – $\dim = 1$

$\sigma_1 \mapsto 1$ $\sigma_1 \mapsto -1$

S_3 : $V_{\square\square\square}$ тождеств $\sigma_i \mapsto 1$ $V_{\substack{\square\\ \square\\ \square}}$ знакопер $\sigma_i \mapsto -1$ $V_{\substack{\square\square\\ \square}}$ $\underline{\dim = 2}$

$1^2 + 1^2 + 2^2 = 6 = 3!$

Граф ветвления
или
Диаграмма
Браттели

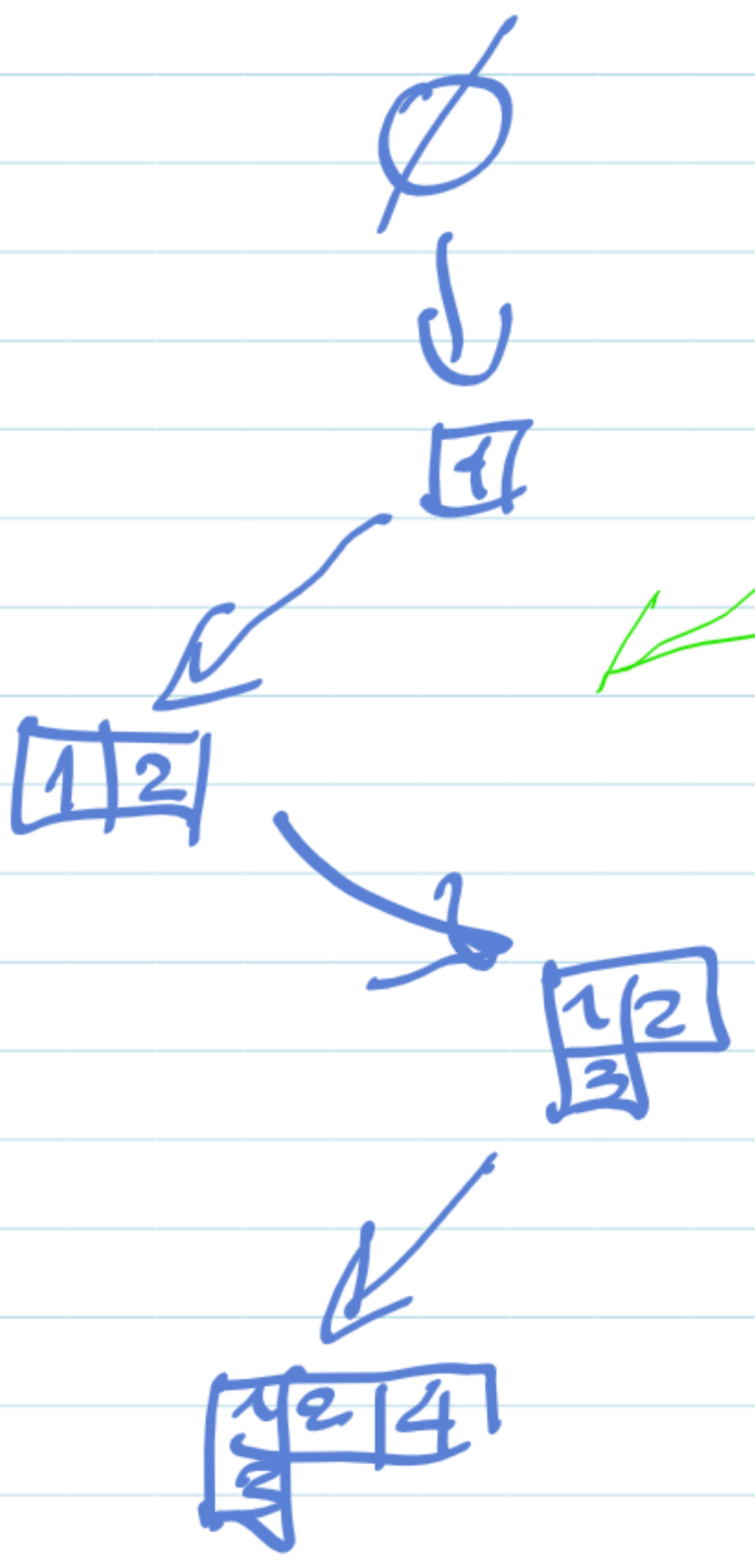


Редукция в графе ветвления. Пример:

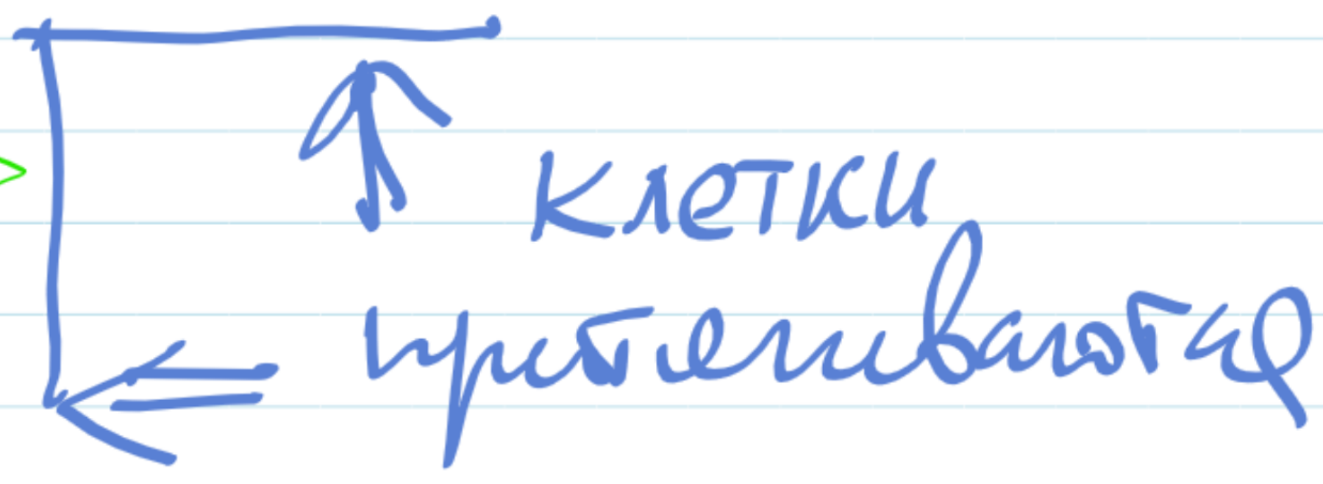
$$: \quad S^{S_4}_{\substack{\square\square\square\\ \square}} = S^{S_3}_{\square\square\square} \oplus S^{S_3}_{\substack{\square\square\\ \square}} \Longrightarrow$$ формула для размерности представления $\longrightarrow$

$\dim V_\lambda$ = # путей из вершины $\varnothing$ графа ветвления в вершину λ.

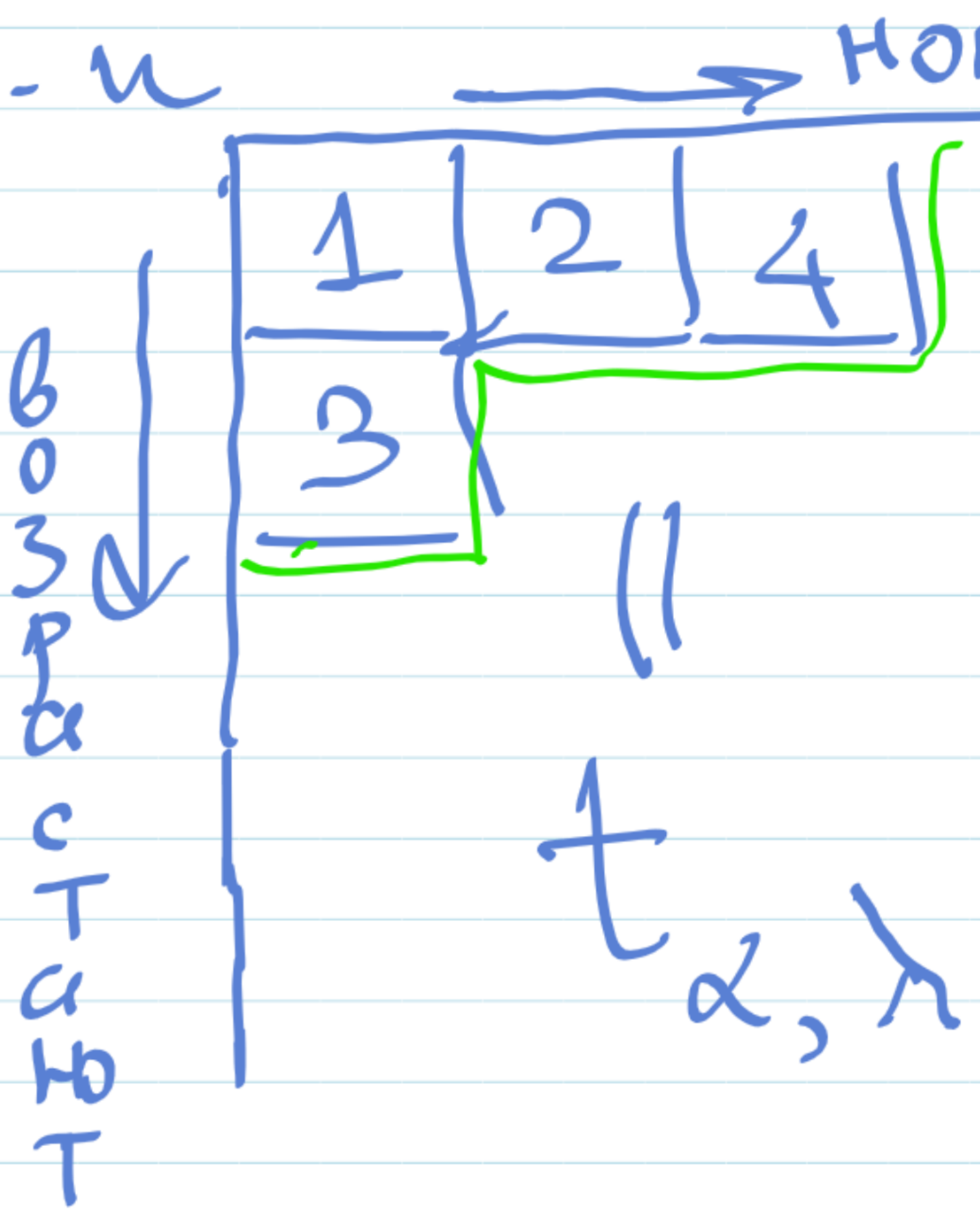
путь



Это процедура накидывания нумерованных клеток $\boxed{i}$, $i=1,2,\dots,n$ в квадрант



В $\lambda \vdash n$ помещаем числа $1 \dots n$

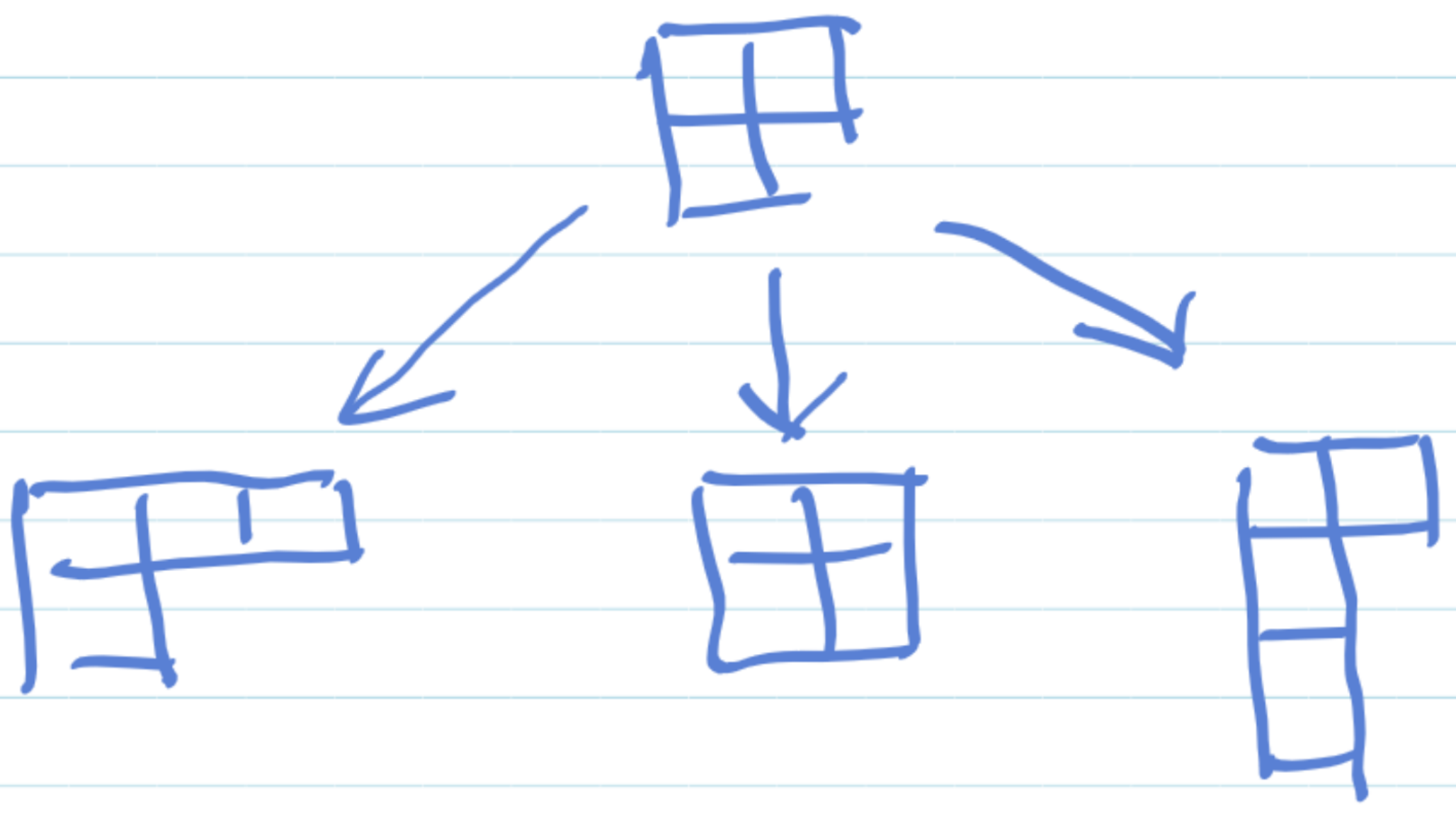


стандартная таблица Юнга

$$\underbrace{\begin{array}{lll}1&2&3\\4&&\end{array}\qquad\begin{array}{lll}1&2&4\\3&&\end{array}\qquad\begin{array}{lll}1&3&4\\2&&\end{array}}$$

$$V_\lambda \qquad \{v_{t_{\alpha,\lambda}}\}$$

Индукция представлений. Пример:



:

$$\boxed{\mathrm{Ind}_{S_3}^{S_4}\, \rho_{(2,1)} = \rho_{(3,1)} \oplus \rho_{(2,2)} \oplus \rho_{(2,1,1)}}$$

$$\dim \rho_{(2,1)} = \dim \rho_{(2,2)} = 2$$

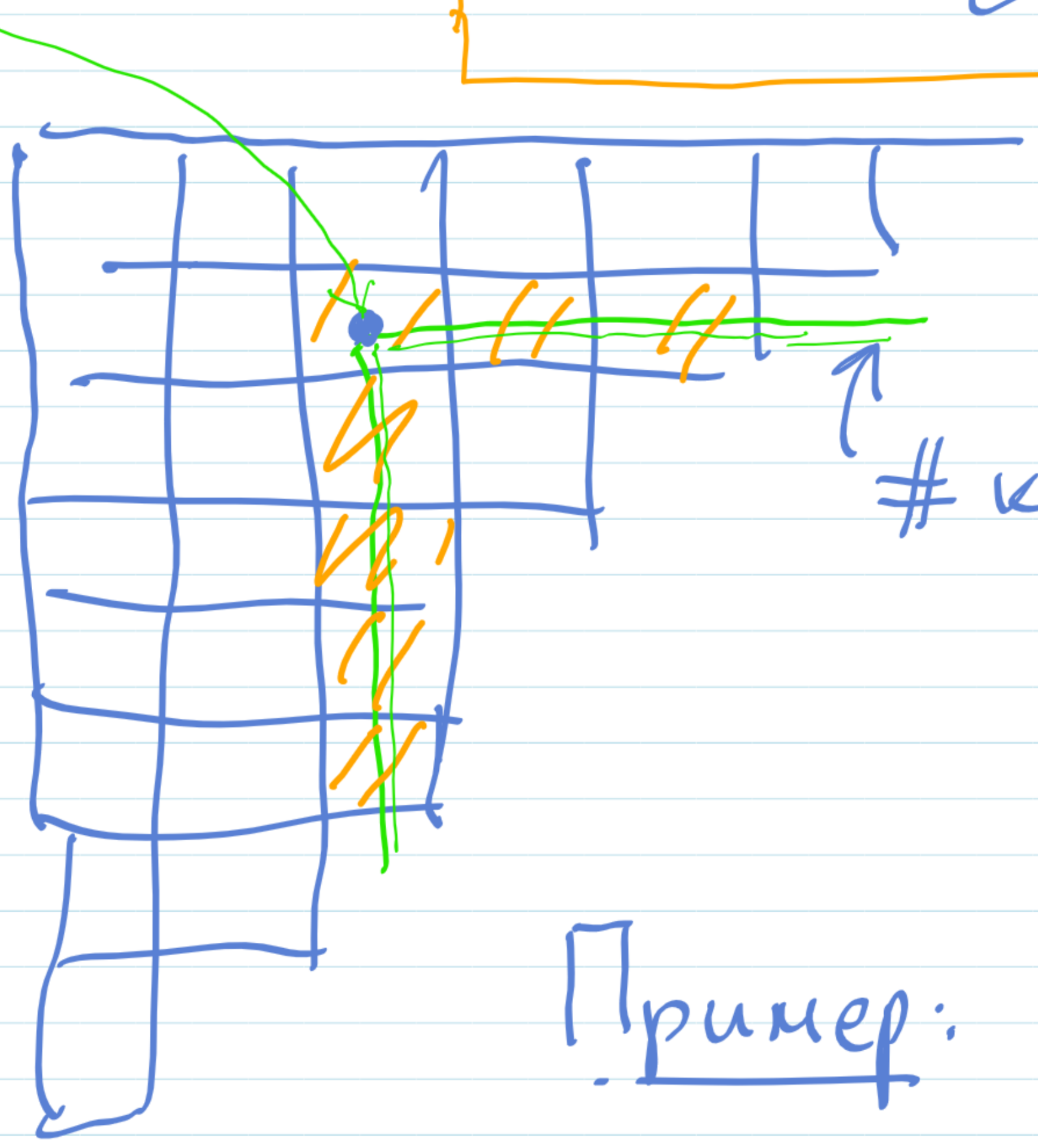
$$\dim \rho_{(3,1)} = \dim \rho_{(2,1,1)} = 3$$

$$\boxed{4 \cdot \dim \rho_{(2,1)} = \dim \rho_{(3,1)} + \dim \rho_{(2,2)} + \dim \rho_{(2,1,1)}}$$

$4 \cdot 2 = 3 + 2 + 3$ — верно!

Формула крюков (hook length formula)

$$\boxed{\dim V_{\lambda\vdash n} = \# t_{\alpha,\lambda\vdash n} = \frac{n!}{\prod_{i=1}^{n} \ell_{\lambda,i}}}$$



Пример:

$\dim V$  $\vdash 5 = \dfrac{5!}{4\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 1} = 5.$

$$\begin{array}{ll}1&2\\3&4\\5&\end{array}\quad \begin{array}{ll}1&2\\3&5\\4&\end{array}\quad \begin{array}{ll}1&3\\2&4\\5&\end{array}\quad \begin{array}{ll}1&3\\2&5\\4&\end{array}\quad \begin{array}{ll}1&4\\2&5\\3&\end{array}$$