

**Семинар 5**  
**Векторный анализ. Лемма Пуанкаре**

1. Докажите, что для любого  $p \geq 1$  дифференциальное уравнение  $pF + \sum_i^n x_i \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0$  имеет только нулевое решение в гладких функциях на  $\mathbb{R}^n$ .
2. Объясните, пожалуйста, как работает оператор  $*$  в векторном анализе на евклидовой плоскости и нарисуйте нужную для перевода лесенку (см лекцию 9 февраля).
3. Не используя лемму Пуанкаре, докажите, что любая дифференциальная  $p$ -форма в  $\mathbb{R}^n$  с постоянными коэффициентами является точной.
4. Найдите решение уравнения  $du = v$ , если  $v = zdx \wedge dz + dy \wedge dz$ .
5. Проверьте замкнутость формы  $\frac{xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$  в пространстве  $\mathbb{R}^3$  без нуля.
6. Пусть  $S$  – гладкая поверхность в  $E^3$ , которая ограничивает тело  $D$ . Докажите, что поток векторного поля  $F$  через поверхность  $S$ , ориентированную внешней нормалью, равен  $\int_D \operatorname{div} F dx \wedge dy \wedge dz$ .
7. Верно ли, что  $i_X(dx \wedge dy \wedge dz)$  – это перевод векторного поля  $\operatorname{rot} X$  в 2-формы?
- 8\*. Вычислить когомологии де Рама двумерной сферы.
- 9\*\*. Рассмотрим отображение некоторой окрестности замкнутого единичного шара в  $E^3$  на ограничивающую его сферу  $S^2$ . Пусть это отображение задано тремя функциями  $f_1, f_2, f_3$  от переменных  $x, y, z$ . Вычислить  $\int_{S^2} f_1 df_2 \wedge df_3$ .