§2 Неприводимые представления $H_n(q)$ и спектр элементов Юциса-Мэрфи. ①

Продолжение.

Нам остаётся убедиться, что

* На пространствах V_λ, $\lambda \vdash n$ действительно реализуются представление $H_n(q)$
* Эти представления неприводимы

Для проверки первого утверждения заметим, что формулы (12), (14) из прошлой лекции задают действия артиковых генераторов g_i в базисе $\{v_\alpha\}$ пр-ства V_λ. Остаётся проверить выполнение соотношений на артиковы генераторы.

Введём удобные обозначения:

Def Бакстеризованный генератор $g_i(x)$:

$$\boxed{g_i(x) := g_i - \frac{q^x}{[x]_q} 1}, \quad \underbrace{[x]_q := \frac{q^x - q^{-x}}{q - q^{-1}}}_{q\text{-числа Эйлера}} \quad (26)$$

Здесь $x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. -

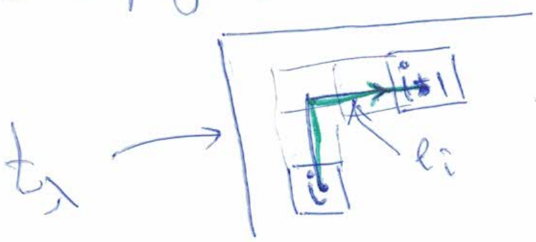
Rem: Вместо параметра x параметр $u = q^x$.
В таком случае $u \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$
и называют "спектральным параметром"

Def Длиной ориентированного крюка между клетками $\boxed{i}$ и $\boxed{i+1}$ стандартной таблицы Юнга называется число $l_i \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$:

$$\boxed{\frac{a_{i+1}}{a_i} = q^{2l_i}}, \qquad (27)$$

где a_i, a_{i+1} – содержания клеток $\boxed{i}$; $\boxed{i+1}$ в таблице.

На рисунке l_i – длина ломаной линии, измеряемая в единицах размера клеток $\boxed{*}$:



$l_i > 0$, если крюк ориентирован так: $\ulcorner\!\to$, $l_i < 0$, если крюк ориентирован так: $\ulcorner\!\downarrow$

В таких обозначениях мы можем переписать формулы (12), (14) так:

$$(14) \to \boxed{v_{\sigma_i \circ \alpha} = \frac{[l_i]_q}{[l_i+1]_q}\, g_i(l_i)\, v_\alpha, \text{ если } l_i \neq \pm 1.} \qquad (28)$$

(12) $\leftrightarrow$ Если $l_i = \pm 1$, то $\sigma_i \circ \alpha$ – не стандартная таблица, т. к. клетки $\boxed{i}$ и $\boxed{i+1}$ расположены так $\boxed{i}\boxed{i+1}$ при $l_i = 1$ или так $\begin{array}{|c|}\hline i \\ \hline i+1 \\ \hline\end{array}$ при $l_i = -1$

В этих случаях $\boxed{g_i(\pm 1)\, v_\alpha = 0 \text{ или } g_i v_\alpha = \pm q^{\pm 1} v_\alpha \text{ при } l_i = \pm 1}$ (29)

Здесь в (28) мы выбрали удобную относительную нормировку базисных векторов v_α и $v_{\sigma_i\circ\alpha}$, вставив в формулу множитель $\frac{[l_i]_q}{[l_i+1]_q} \neq 0$ (см. наши условия на q)

Утверждение: Бакстеризованные генераторы удовлетворяют соотношениям:

$$
\begin{cases}
g_i(x)\, g_k(y) = g_k(y)\, g_i(x) \quad \forall |i-k|>1 & (30a) \\
g_i(x)\, g_i(-x) = \dfrac{[x-1]_q[x+1]_q}{[x]_q^2} 1 = \dfrac{[x]_q^2-1}{[x]_q^2} 1 & (30b)\ (\text{унитарность}) \\
g_i(x)g_{i+1}(x+y)g_i(y) = g_{i+1}(y)g_i(x+y)g_{i+1}(x) & (30c)\ (\text{уравнение Янга-Бакстера})
\end{cases}
$$

Набор этих соотношений при любых зафиксированных значениях параметров $x, y \neq 0$ эквивалентен набору определяющих соотношений на артиновы генераторы $H_n(q)$

Док-во: Коммутативность (30а) очевидна.

Проверим соотношения унитарности (30в):

$$
g_i(x)g_i(-x) = \left(g_i - \frac{q^x}{[x]_q}1\right)\left(g_i + \frac{q^{-x}}{[x]_q}1\right) = \underset{\substack{\| \\ 1+(q-q^{-1})g_i}}{g_i^2} - \frac{q^x-q^{-x}}{[x]_q}g_i - \frac{1}{[x]_q^2}1 =
$$

$$
= \left(1 - \frac{1}{[x]_q^2}\right)1
$$

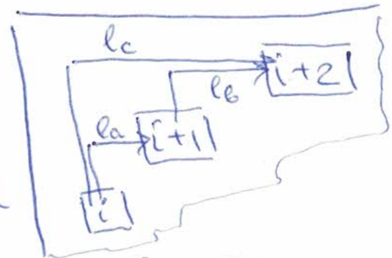
Видно, что соотношения унитарности при $\forall$ фикс. x эквивалентны соотношению Гекке: $g_i^2 = 1 + (q-q^{-1})g_i$.

Проверка эквивалентности уравнений Янга-Бакстера соотношениям кос (при условии, что соотношения коммутативности и Гекке выполнются) — задача 2-го листка ▨

Следствие: Формулы (28), (29) задают представление $H_n(q)$ на базисных векторах v_α пространств V_λ (α – стандартные таблицы диаграммы $\lambda \vdash n$).

Док-во: Достаточно проверить выполнения соотношений (30а–в) на векторах v_α при специально подобранных параметрах.

Пусть индекс α вектора v_α имеет вид:



Обозначим ℓ_a – длину крюка между $\boxed{i}$ и $\boxed{i+1}$ в α

ℓ_b – —"— между $\boxed{i+1}$ и $\boxed{i+2}$

$\ell_c = \ell_a + \ell_b$

$$\begin{cases} q^{2\ell_a} = \dfrac{a_{i+1}}{a_i} \\ q^{2\ell_b} = \dfrac{a_{i+2}}{a_{i+1}} \\ q^{2\ell_c} = \dfrac{a_{i+2}}{a_i} \end{cases}$$

В соответствии с (28) имеем:

$$\boxed{g_i(\ell_a)\, v_\alpha = \frac{[\ell_a+1]_q}{[\ell_a]_q}\, v_{\sigma_i \circ \alpha} \qquad (31a)}$$

$$g_{i+1}(\ell_c)\, v_{\sigma_i \circ \alpha} = \frac{[\ell_c+1]_q}{[\ell_c]_q}\, v_{\sigma_{i+1}\sigma_i \circ \alpha}$$

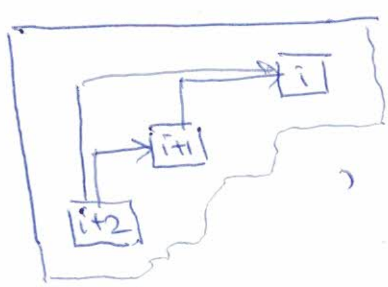
$$g_i(\ell_b)\, v_{\sigma_{i+1}\sigma_i \circ \alpha} = \frac{[\ell_b+1]_q}{[\ell_b]}\, v_{\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i \circ \alpha}$$

$$g_{i+1}(\ell_b)\, v_\alpha = \frac{[\ell_b+1]_q}{[\ell_b]_q}\, v_{\sigma_{i+1} \circ \alpha}$$

$$g_i(\ell_c)\, v_{\sigma_{i+1} \circ \alpha} = \frac{[\ell_c+1]_q}{[\ell_c]_q}\, v_{\sigma_i \sigma_{i+1} \circ \alpha}$$

$$g_{i+1}(\ell_a)\, v_{\sigma_i \sigma_{i+1} \circ \alpha} = \frac{[\ell_a+1]_q}{[\ell_a]}\, v_{\sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \circ \alpha}$$

Так как $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i \circ \alpha = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \circ \alpha =$



,

заключаем: $\boxed{\left(g_i(\ell_b)\, g_{i+1}(\ell_a+\ell_b)\, g_i(\ell_a) - g_{i+1}(\ell_a)\, g_i(\ell_a+\ell_b)\, g_{i+1}(\ell_b)\right) v_\alpha = 0}$

Таким образом мы доказали выполнение уравнений Янга-Бакстера на большинстве базисных векторов v_α — на тех, в которых клетки $\boxed{i}$, $\boxed{i+1}$ и $\boxed{i+2}$ не появляются в одном столбце или одной строке.

Для оставшихся векторов проверка происходит с использованием соотношений (29).

Для проверки соотношений унитарности используем (31) (см. стр4) вместе с

$$\boxed{g_i(-l_a)v_{\sigma_i\circ\alpha} = \frac{[-l_a+1]_q}{[-l_a]_q}v_\alpha = \frac{[l_a-1]_q}{[l_a]_q}v_\alpha} \quad (31б)$$

— это соотношение — реализация (28) для $v_{\sigma_i\circ\alpha}$.

Заключаем: $\left(g_i(-l_a)g_i(l_a) - \frac{[l_a+1]_q[l_a-1]_q}{[l_a]_q^2}1\right)v_\alpha = 0$

для тех векторов v_α, в индексе α которых клетки $\boxed{i}$ и $\boxed{i+1}$ не появляются в одной строке или одном столбце.

Для оставшихся векторов при проверке соотношений унитарности применяем (29) ▨

Осталось доказать неприводимость представлений V_λ.

Мы это сделаем, проверив что $\rho_{V_\lambda} \cong \mathrm{End}(V_\lambda)$, а точнее, построив прообразы всех матричных единиц $E_{\alpha\beta}$ — базисных векторов $\mathrm{End}(V_\lambda)$ — в представлении ρ_{V_λ}.

§3 Тождества в подалгебре Юциса-Мэрфи. Матричные единицы.

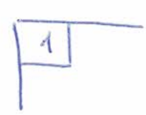
Подалгебра элементов JM конечномерна $\Rightarrow$ генераторы J_i, $i=1\ldots n$, удовлетворяют некоторым полиномиальным тождествам, которые и характеризуют подалгебру JM.

Мы рассмотрим действие элементов J_i в пространстве

$$\boxed{V_n = \bigoplus_{\lambda\vdash n} V_\lambda}$$

Если мы убедимся затем, что в V_n реализуется <u>точное</u> представление $H_n(q)$, т.е., что $\rho: H_n(q)\to V_n$ имеет свойство $\operatorname{Ker}\rho = 0$, то полученные нами соотношения для J_i, действующих на V_n окажутся тождественно выполняющимися в $H_n(q)$.

Будем строить соотношения индуктивно по n, и рисовать картинки соотношений на языке диаграмм Юнга

<u>В $H_1(q)$</u>: $\quad \boxed{J_1 - 1 = 0} \iff$ 

Клетка $\boxed{1}$, соответствующая J_1, попадает в угол квадранта с содержанием $a_1 = 1$

В $H_2(q)$: $$(J_2 - q^2 1)(J_2 - q^{-2} 1) = 0 \qquad (32a)$$ — это соотношение Гекке.

$\Updownarrow$

Клетку $\boxed{2}$ в угол с клеткой $\boxed{1}$ мы можем разместить в одном из 2-х мест отмеченных звездочкой

$$\begin{array}{|c|c}
\hline
1 & * \\
\hline
* & \\
\end{array}$$

Содержания этих мест $a_2 = q^2$ и $a_2 = q^{-2}$.

Прежде, чем перейти к рассмотрению $H_3(q)$, используем (32a) для построения идемпотентов в $H_2(q)$

$$P_{\substack{\boxed{1}\\ \boxed{2}}} := \frac{J_2 - q^2 1}{q^{-2} - q^2}\,, \qquad P_{\boxed{1}\boxed{2}} := \frac{J_2 - q^{-2}}{q^2 - q^{-2}} \qquad (33)$$

крестик показывает, какой фактор из (32a) мы сохраняем в правой части

В силу (32a) они обладают свойством ортогональности, и образуют пирсовское разложение единицы в $H_2(q)$:

$$P^2_{\substack{\boxed{1}\\ \boxed{2}}} = P_{\substack{\boxed{1}\\ \boxed{2}}}\,, \quad P^2_{\boxed{1}\boxed{2}} = P_{\boxed{1}\boxed{2}}\,, \quad P_{\substack{\boxed{1}\\ \boxed{2}}} P_{\boxed{1}\boxed{2}} = P_{\boxed{1}\boxed{2}} P_{\substack{\boxed{1}\\ \boxed{2}}} = 0 \qquad (32в)$$

$$P_{\substack{\boxed{1}\\ \boxed{2}}} + P_{\boxed{1}\boxed{2}} = 1$$

Набор соотношений (32в) эквивалентен (32a), при условии, что собственные значения J_2 в (32a) все различны: $q^2 \neq q^{-2}$, т.е. $q^4 \neq 1$ (а это наше ограничение на q при рассмотрении $H_2(q)$).

Сопоставление тождеству (32a) идемпотентов (33) с соотношениями (32в) — стандартная процедура в ассоциативных абелевых алгебрах, при условии, что в (32a) нет одинаковых факторов.

В $H_3(q)$: Здесь мы переходим к построению соотношений не в алгебре $H_3(q)$, а в ее образе при действии на $V_3 = V_{[1,1,1]} \oplus V_{[3]} \oplus V_{[2,1]}$

В зависимости от уже имеющейся конфигурации клеток $\boxed{1}$ и $\boxed{2}$, мы можем кинуть клетку $\boxed{3}$ в следующие позиции:

$$\begin{array}{|c|c|l} \hline 1 & 2 & * \\ \hline * & & \end{array} \quad \text{и} \quad \begin{array}{|c|l} \hline 1 & * \\ \hline 2 & \\ \hline * & \end{array}$$

Заметим, что $P_{\boxed{1}\boxed{2}}$ и $P_{\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}} \in H_2(q) \subset H_3(q)$ — проекторы на подпространства векторов в базисе V_3, индексы которых имеют вид $\boxed{1}\boxed{2}\ldots$ и $\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\ldots$, соответственно.

Поэтому на V_3 имеем тождества:

$$\begin{cases} P_{\boxed{1}\boxed{2}}\,(J_3-q^4)(J_3-q^{-2}) \equiv 0 & (\text{на } V_3) \\ P_{\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}}\,(J_3-q^2)(J_3-q^{-4}) = 0 \end{cases} \qquad (34a)$$

Их можно переписать явно в терминах J_2, J_3:

$$\begin{cases} (J_2-q^{-2})(J_3-q^4)(J_3-q^{-2}) = 0 \\ (J_2-q^2)(J_3-q^2)(J_3-q^{-4}) = 0 \end{cases} (\text{на } V_3) \qquad (34b)$$

Тождествам (34a) (или (34b)) взаимнооднозначно сопоставляются идемпотенты:

$$P_{\boxed{1\,2\,3}} := P_{\boxed{1\,2}} \frac{(J_2 - q^{-2})}{q^4 - q^{-2}} \; ; \quad P_{\begin{smallmatrix}1&2\\3&\end{smallmatrix}} := P_{\boxed{1\,2}} \frac{(J_2 - q^{4})}{q^{-2} - q^{4}} \; ;$$

$$P_{\begin{smallmatrix}1\\2\\3\end{smallmatrix}} := P_{\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}} \frac{(J_2 - q^{2})}{q^{-4} - q^{2}} \; ; \quad P_{\begin{smallmatrix}1&3\\2&\end{smallmatrix}} := P_{\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}} \frac{(J_2 - q^{-4})}{q^{2} - q^{-4}} \, . \qquad (35)$$

при условии, что все факторы в (34а,б) различны, т.е., $q^4 \neq q^{-2} \Leftrightarrow q^6 \neq 1$ (вдобавок к уже наложенному условию $q^4 \neq 1$).

С использованием идемпотентов (35) соотношения (34а,б) переписываются в эквивалентном виде:

$$\boxed{P_\alpha \cdot P_\beta = \delta_{\alpha\beta} P_\alpha} \, , \text{ где } \alpha \in \left\{ \begin{smallmatrix}1\\2\\3\end{smallmatrix} , \boxed{1\,2\,3} , \begin{smallmatrix}1&2\\3&\end{smallmatrix} , \begin{smallmatrix}1&3\\2&\end{smallmatrix} \right\} \text{ (на } V_3) \qquad (36)$$

$$P_{\boxed{1\,2\,3}} + P_{\begin{smallmatrix}1&2\\3&\end{smallmatrix}} = P_{\boxed{1\,2}} \, , \; P_{\begin{smallmatrix}1\\2\\3\end{smallmatrix}} + P_{\begin{smallmatrix}1&3\\2&\end{smallmatrix}} = P_{\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}} \Rightarrow \boxed{\sum_\alpha P_\alpha = 1}$$

Заметим также, что P_α являются "собственными векторами" элементов J_i: в силу тождеств (32а), (34) имеем

$$J_i P_\alpha = a_i P_\alpha = P_\alpha J_i \, , \; (\text{на } V_3) \qquad (37)$$

где a_i – содержание клетки $\boxed{i}$ в стандартной таблице α

Вспоминая, что на базисных векторах $v_\alpha \in V_3$ мы также имеем $J_i v_\alpha = a_i v_\alpha$ заключаем

$$\boxed{P_\alpha V_3 = \mathbb{C} v_\alpha} \qquad (38a)$$

– идемпотенты P_α вырезают в V_3 одномерные подпространства.

Или, эквивалентно

$$\boxed{P_\alpha v_\beta = \delta_{\alpha\beta}\, v_\alpha \ (\text{на } V_3)} \qquad (38в)$$

То есть идемпотенты P_α ведут себя так же при действии на V_3, как ведут себя диагональные матричные единицы $E_{\alpha\alpha} \in \mathrm{End}(V_3)$, и соотношения для них такие же – см. (36), формулы в красных рамках.

Конструкция тождеств и идемпотентов P_α, $\alpha = t_\lambda$, $\lambda \vdash n$ продолжается индукцией по n. В качестве примера приведем тождества и идемпотенты на уровне

$H_4(q)$: $V_4 := V_{[1^4]} \oplus V_{[2,1^2]} \oplus V_{[2^2]} \oplus V_{[3,1]} \oplus V_{[4]}$

тождества (на V_4)

$\begin{smallmatrix}1&2&3&*\\ *\end{smallmatrix}$: $\quad P_{\begin{smallmatrix}1&2&3\end{smallmatrix}}\,(J_4 - q^6)(J_4 - q^{-2}) \equiv 0$

$\begin{smallmatrix}1&*\\2\\3\\ *\end{smallmatrix}$: $\quad P_{\begin{smallmatrix}1\\2\\3\end{smallmatrix}}\,(J_4 - q^2)(J_4 - q^{-6}) \equiv 0$

$\begin{smallmatrix}1&2&*\\3&*\\ *\end{smallmatrix}$: $\quad P_{\begin{smallmatrix}1&2\\3\end{smallmatrix}}\,(J_4 - q^4)(J_4 - 1)(J_4 - q^{-4}) = 0$

$\begin{smallmatrix}1&3&*\\2&*\\ *\end{smallmatrix}$: $\quad P_{\begin{smallmatrix}1&3\\2\end{smallmatrix}}\,(J_4 - q^4)(J_4 - 1)(J_4 - q^{-4}) = 0$

идемпотенты

при условии $q^8 \neq 0$ (а также $q^6 \neq 1$, $q^4 \neq 1$)

$$P_{\begin{smallmatrix}1&2&3&4\\ \times\end{smallmatrix}} := P_{\begin{smallmatrix}1&2&3\end{smallmatrix}} \cdot \frac{(J_4 - q^{-2})}{q^6 - q^{-2}};$$

$$P_{\begin{smallmatrix}1&2&3&\times\\4\end{smallmatrix}} := P_{\begin{smallmatrix}1&2&3\end{smallmatrix}} \cdot \frac{(J_4 - q^6)}{(q^{-2} - q^6)}; \quad P_{\begin{smallmatrix}1&2&\times\\3&4\\ \times\end{smallmatrix}} := P_{\begin{smallmatrix}1&2\\3\end{smallmatrix}} \frac{(J_4 - q^4)(J_4 - q^{-4})}{(1 - q^4)(1 - q^{-4})};$$

$$P_{\begin{smallmatrix}1&2&4\\3&\times\\ \times\end{smallmatrix}} := P_{\begin{smallmatrix}1&2\\3\end{smallmatrix}} \frac{(J_4 - 1)(J_4 - q^{-4})}{(q^4 - 1)(q^4 - q^{-4})}; \quad P_{\begin{smallmatrix}1&2&\times\\3&\times\\4\end{smallmatrix}} := P_{\begin{smallmatrix}1&2\\3\end{smallmatrix}} \frac{(J_4 - q^4)(J_4 - 1)}{(q^{-4} - q^4)(q^{-4} - 1)}$$ и т.д.

Действие этих идемпотентов на V_4 совпадает с действием диагональных матричных единиц:

для $\alpha\beta = t_\lambda$, где $\lambda \in \{\ldots\}$, т.е. $\lambda \vdash 4$:

$$P_\alpha P_\beta = \delta_{\alpha\beta} P_\alpha, \quad \sum_\alpha P_\alpha = 1 \quad (\text{на } V_4)$$

$$P_\alpha v_\beta = \delta_{\alpha\beta} v_\alpha \quad (\text{как } E_{\alpha\alpha})$$

Сформулируем результат для произвольного n:

Теорема 1: Пусть $q \neq \pm 1$, $q^{2k} \neq 1 \ \forall k : |k| \le n$.
Рассмотрим представление $V_n := \bigoplus_{\lambda \vdash n} V_\lambda$ алгебры $H_n(q)$.

(а) Для элементов J_n можно написать набор тождеств (при действии на V_n), элементы которого нумеруются стандартными таблицами t_ν, отвечающими диаграммам Юнга $\nu \vdash n-1$:

$$\boxed{P_{t_\nu} \prod_{\{c\}} (J_n - a(c)) = 0 \quad (\text{на } V_n)} \qquad (39)$$

где $\{c\}$ — набор всех позиций, на которые в диаграмме $\nu \vdash n-1$ можно поставить клетку $\boxed{n}$, а $a(c)$ — содержание клетки $\boxed{n}$ в позиции c. На картинке:

Эквивалентная формулировка

(б) Для каждой стандартной таблицы t_λ, $\lambda \vdash n$ можно построить элемент

$$\boxed{P_{t_\lambda} = P_{t_{\lambda'}} \prod_{\substack{\{c\} \\ c \neq c_0}} \frac{(J_n - a(c))}{(a(c_0) - a(c))}} \qquad (40)$$

Здесь $\lambda' \vdash (n-1)$, $\lambda' \subset \lambda$, а стандартная таблица $t_{\lambda'}$ получена из t_λ удалением клетки $\boxed{n}$; $\{c\}$ — набор всех позиций, на которые можно поместить клетку $\boxed{n}$ в диаграмме $\lambda' \vdash (n-1)$; $a(c)$ — содержания этих позиций; c_0 — позиция, на которой стоит $\boxed{n}$ в t_λ.

Элементы P_α, $\alpha \in \{t_\lambda, \lambda \vdash n\}$ при действии на V_n выполняют роль диагональных матричных единиц $E_{\alpha\alpha}$:

$$\boxed{P_\alpha P_\beta = \delta_{\alpha\beta} P_\alpha\,; \quad \sum_\alpha P_\alpha = 1\,; \quad P_\alpha v_\beta = \delta_{\alpha\beta} v_\alpha \quad (\text{на } V_n)} \tag{41}$$

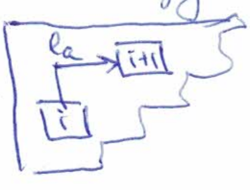
Rem Если избавиться в (39) от знаменателей, присутствующих в определении P_{t_λ}, то получившиеся полиномиальные тождества для J_i, $i=1\ldots n$, верны в алгебре $H_n(q)$ без ограничений на параметр $q \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$.

Займемся построением элементов $H_n(q)$, образы которых действуют в V_n как недиагональные матричные единицы $E_{\alpha\beta}$:

$$E_{\alpha\beta} v_\gamma = \delta_{\beta\gamma} v_\alpha .$$

Здесь α и β — стандартные таблицы, отвечающие одной и той же диаграмме $\lambda \vdash n$; γ — любая стандартная таблица из множества $\{t_\mu, \forall \mu \vdash n\}$.

Рассмотрим элемент $g_i(\ell_a) P_\beta$, где ℓ_a — длина крюка между клетками $\boxed{i}$ и $\boxed{i+1}$ в стандартной таблице β: $\beta =$



$$\frac{a_{i+1}}{a_i} = q^{2\ell_a}.$$

Вычислим действие этого элемента на базисных векторах V_n:

$$g_i(l_a)\,P_\beta\,v_\gamma = \delta_{\beta\gamma}\,g_i(l_a)\,v_\beta \overset{(31a)}{=} \frac{[l_a+1]_q}{[l_a]_q}\,\delta_{\beta\gamma}\,v_{\sigma_i\circ\beta}$$

Итак

$$\boxed{\frac{[l_a]_q}{[l_a+1]_q}\,g_i(l_a)\,P_\beta \longleftrightarrow \underset{\substack{\uparrow\\ \text{недиаг. матр. единица.}}}{E_{\sigma_i\circ\beta,\,\beta}}\ (\text{на } V_n)} \quad (42a)$$

Есть и другое выражение для матричной единицы $E_{\sigma_i\circ\beta,\,\beta}$:
Вычислим действие $P_{\sigma_i\circ\beta}\,g_i(-l_a)$ на базисных векторах V_n:

на v_β

$$P_{\sigma_i\circ\beta}\,g_i(-l_a)\,v_\beta = P_{\sigma_i\circ\beta}\Big\{g_i(l_a)\underbrace{-\frac{q^{l_a}}{[l_a]_q}+\frac{q^{-l_a}}{[l_a]_q}}_{\overset{\shortparallel}{-(q-q^{-1})}}\Big\}v_\beta =$$

$$\overset{(31a)}{=} P_{\sigma_i\circ\beta}\,\frac{[l_a+1]_q}{[l_a]_q}\,v_{\sigma_i\circ\beta} - (q-q^{-1})\underbrace{P_{\sigma_i\circ\beta}\,v_\beta}_{\overset{\shortparallel}{0}} = \frac{[l_a+1]_q}{[l_a]_q}\,v_{\sigma_i\circ\beta}$$

на $v_{\sigma_i\circ\beta}$

$$P_{\sigma_i\circ\beta}\,g_i(-l_a)\,v_{\sigma_i\circ\beta} \overset{(31b)}{=} \frac{[l_a-1]_q}{[l_a]_q}\,P_{\sigma_i\circ\beta}\,v_\beta = 0$$

на v_γ $(\gamma\neq\beta,\sigma_i\circ\beta)$

длина крюка $\boxed{i}\to\boxed{i+1}$ в таблице γ

$$P_{\sigma_i\circ\beta}\,g_i(-l_a)\,v_\gamma = P_{\sigma_i\circ\beta}\big(g_i(l_b) + \text{const}\cdot 1\big)v_\gamma =$$

$$= P_{\sigma_i\circ\beta}\big(\text{const}_1\,v_{\sigma_i\circ\gamma} + \text{const}_2\,v_\gamma\big) = 0$$

Итак, снова получаем:

$$\boxed{\frac{[l_a]_q}{[l_a+1]_q}\,P_{\sigma_i\circ\beta}\,g_i(-l_a) \longleftrightarrow E_{\sigma_i\beta,\,\beta}\ (\text{на } V_n)} \quad (42b)$$

Теперь мы готовы доказать основной результат:

Теорема 2 В условиях Теоремы 1

* отображение $H_n(q) \longrightarrow \mathrm{End}(V_\lambda)$, где V_λ, $\lambda \vdash n$, — любая из компонент $V_n = \bigoplus_{\lambda \vdash n} V_\lambda$, является эпиморфизмом

* отображение $H_n(q) \to \bigoplus_{\lambda \vdash n} \mathrm{End}(V_\lambda)$ является изоморфизмом и, значит, представление V_n — точно.

* соотношения (39), (41) из Теоремы 1, а также равенства

$$\boxed{\begin{aligned} &g_i(l_a) P_\alpha = P_{\sigma_i \circ \alpha}\, g_i(-l_a), \text{ если } l_a \neq \pm 1 \\ &g_i(\pm 1) P_\alpha = P_\alpha\, g_i(\pm 1) = 0, \text{ если } l_a = \pm 1, \\ &\text{где } l_a - \text{длина крюка между клетками } \boxed{i} \text{ и } \boxed{i+1} \text{ в } \alpha. \end{aligned}} \tag{43}$$

выполняются в алгебре $H_n(q)$

Формулы (40) и (43) порождают явную реализацию изоморфизма

$$\boxed{H_n(q) \cong \bigoplus_{\lambda \vdash n} \mathrm{End}(V_\lambda)}$$

* Четыре Факта, сформулированные в § 1 относительно алгебр Гекке $H_n(q)$ верны.

реализация изоморфизма

$$\boxed{P_\alpha \longleftrightarrow E_{\alpha\alpha}, \quad \frac{[l_a]_q}{[l_a+1]_q}\, g_i(l_a) P_\alpha = \frac{[l_a]_q}{[l_a+1]_q} P_{\sigma_i \circ \alpha}\, g_i(-l_a) \leftrightarrow E_{\sigma_i \alpha, \alpha}}$$

Док-во:

По первому пункту: Мы построили прообразы в $H_n(q)$ для диагональных матричных единиц $E_{\alpha\alpha} \in \mathrm{End}(V_\lambda)$ и для некоторых недиагональных $E_{\alpha,\sigma_i\circ\alpha}$. Так как любую пару стандартных таблиц одной формы можно связать последовательностью перестановок клеток с соседними номерами ($\boxed{i}$ и $\boxed{i+1}$), то уже построенные матричные единицы порождают все остальные матричные единицы $E_{\alpha\beta}$. Однозначность определения $E_{\alpha\beta}$ по его действию в базисе $\{v_\gamma\}$ гарантирует, что сюръекция $H_n(q) \to \mathrm{End}(V_\alpha)$ является эпиморфизмом алгебр.

В качестве упражнения можно проверить, что соотношения $E_{\alpha,\sigma_i\circ\alpha} E_{\sigma_i\circ\alpha,\alpha} = E_{\alpha\alpha}$ следует из (43) и (41).

По второму пункту.

Известный комбинаторный результат: алгоритм Робинсона-Шенстеда (Robinson-Schensted correspondence) устанавливает взаимно-однозначное соответствие между элементами симметрической группы S_n и всевозможными парами стандартных таблиц Юнга одной и той же формы. Отсюда следует равенство

$$\boxed{\sum_{\lambda\vdash n} \dim(\mathrm{End}(V_\lambda)) = \sum_{\lambda\vdash n} (\dim V_\lambda)^2 = \# S_n = n!}$$

Следствие первого пункта: $\dim H_n(q) \geq \sum_{\lambda\vdash n} \dim(\mathrm{End}(V_\lambda)) = n!$

Ранее мы доказали $\dim H_n(q) \leq n!$. Следовательно $\dim H_n(q) = \sum_{\lambda\vdash n} \dim \mathrm{End}(V_\lambda) = n!$ — имеем изоморфизм.

Формулы третьего пункта являются очевидным следствием (42 а,в), (39), (41) и точности представления V_n

Из фактов об алгебре Гекке $H_n(q)$, приведенных в §1, первые три уже доказаны (в предыдущих пунктах этой теоремы и в последнем утверждении Теоремы 1 из 1-й части записок).

Остаётся убедиться в справедливости того, что $Z(H_n(q))$ совпадает с $\mathrm{Symm}(J_1 \dots J_n)$. Рассуждение аналогично доказательству пункта а) Утв. 4 из 1-й части записок.

Центр $\bigoplus\limits_{\lambda\vdash n} \mathrm{End}(V_\lambda)$ имеет линейный базис, состоящий из единичных операторов в каждом из пространств V_λ: $Z\left(\bigoplus\limits_{\lambda\vdash n} \mathrm{End}(V_\lambda)\right) = \mathrm{Span}(\mathrm{Id}_{V_\lambda}, \lambda\vdash n)$.

Эти единичные операторы Id_{V_λ} "различают" пространства неприводимых представлений V_λ.

Но, как мы убедились в док-ве а) Утв4 части 1 записок, симметрические полиномы от a_i, $i=1\dots n$, различают стандартные таблицы разной формы λ (если только содержания клеток, стоящих на разных диагоналях  в таблице различны, а это следует из наших ограничений на q).

$a_i \to$ собственные значения J_i, значит симм. полиномы J_i различают пространства V_λ $\Rightarrow$ они составляют весь центр

Практический пример: как с помощью формул (31a,b) строить явно неприводимые представления.

Формулы (31a,b):

$$\begin{cases} g_i(l_a)\, v_\alpha = \dfrac{[l_a+1]_q}{[l_a]_q}\, v_{\sigma_i\circ\alpha} \\ g_i(-l_a)\, v_{\sigma_i\circ\alpha} = \dfrac{[l_a-1]_q}{[l_a]_q}\, v_\alpha \end{cases}$$

l_a — длина крюка между $\boxed{i}$ и $\boxed{i+1}$ в α. $l_a \neq \pm 1$

Перепишем в виде:

$$\begin{cases} g_i\, v_\alpha = \dfrac{q^{l_a}}{[l_a]_q}\mathbf{V}_{\text{alpha}} + \dfrac{[l_a+1]_q}{[l_a]_q}\, v_{\sigma_i\circ\alpha} \\ g_i\, v_{\sigma_i\circ\alpha} = -\dfrac{q^{-l_a}}{[l_a]_q}\mathbf{V}_{\text{alpha}} + \dfrac{[l_a-1]_q}{[l_a]_q}\, v_\alpha \end{cases} \qquad l_a \neq \pm 1 \qquad (44a)$$

Добавим к ним формулы из Теоремы 1 1-й части записок:

$$g_i\, v_\alpha = \pm q^{\pm 1} v_\alpha, \text{ если } l_a = \pm 1 \qquad (44b)$$

Формулы (44a,b) задают действие артиновых генераторов $H_n(q)$ в представлениях V_λ, $\lambda \vdash n$. Отметим, что матрицы артиновых генераторов в базисе $\{v_\alpha\}$ состоят из 2×2 и 1×1 блоков, не более.

Пример: $V_{(3,1)}$ — трехмерное представление $H_4(q)$

Базис $\left\{ v_{\begin{smallmatrix}1&2&3\\4\end{smallmatrix}},\ v_{\begin{smallmatrix}1&2&4\\3\end{smallmatrix}},\ v_{\begin{smallmatrix}1&3&4\\2\end{smallmatrix}} \right\}$. Матрицы g_1, g_2, g_3:

$$g_1 \mapsto \begin{pmatrix} q & \cdot & \cdot \\ \cdot & q & \cdot \\ \cdot & \cdot & -\frac{1}{q} \end{pmatrix},\quad g_2 \mapsto \begin{pmatrix} q & \cdot & \cdot \\ \cdot & -\frac{q^{-2}}{[2]_q} & \frac{[3]_q}{[2]_q} \\ \cdot & \frac{1}{[2]_q} & \frac{q^2}{[2]_q} \end{pmatrix},\quad g_3 \mapsto \begin{pmatrix} -\frac{q^{-3}}{[3]_q} & \frac{[4]_q}{[3]_q} & \cdot \\ \frac{[2]_q}{[3]_q} & \frac{q^3}{[3]_q} & \cdot \\ \cdot & \cdot & q \end{pmatrix}$$

$$g_2\, v_{\begin{smallmatrix}1&2&4\\3\end{smallmatrix}} = -\frac{q^{-2}}{[2]_q}\, v_{\begin{smallmatrix}1&2&4\\3\end{smallmatrix}} + \frac{1}{[2]_q}\, v_{\begin{smallmatrix}1&3&4\\2\end{smallmatrix}}$$

Rem: В пределе $q \to 1$ из представлений $H_n(q)$ получаем представления S_n.

В примере $V_{\yng(3,1)}$ получаем $\left(g_i \xrightarrow{q\to 1} \sigma_i\right)$.

$$\sigma_1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & -1/2 & 3/2 \\ \cdot & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 \mapsto \begin{pmatrix} -1/3 & \frac{4}{3} & \cdot \\ 2/3 & 1/3 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix}$$

Замечательно, что в выбранном базисе представления S_n определены не только над $\mathbb{C}$, но и над полями $\mathbb{R}$ и $\mathbb{Q}$.

§ 4 Другие конечные/конечномерные факторы в B_n / $\mathbb{C}[B_n]$.

Рассмотрим B_3. Для получения конечной фактор-группы в ней можно накладывать следующего вида соотношения на артиновы генераторы

$$\boxed{b_1^p = 1 \;, \quad p = 2,3,4,5,} \tag{1}$$

При $p=6$ фактор-группа остается бесконечной.

Обсудим следующий после $p=2$ (т.е. S_3) случай: $p=3$.

Фактор-группа $\boxed{BT_3 := B_3/\langle b^3 \rangle}$ – группа порядка 24, называемая двойной группой тетраэдра (binary tetrahedral group). Она имеет центр порядка 2.

Фактор-группа $\boxed{BT_3/\mathbb{Z}(T_3) \cong A_4}$ – подгруппа чётных перестановок в S_4. Её порядок – 12. A_4 – группа симметрий тетраэдра (отсюда происходит название BT_3)

BT_3 также изоморфна группе $SLF(2,3)$ – группе 2×2 матриц с $\det = 1$ и компонентами из поля F_3 ($\operatorname{char} F_3 = 3$).

Эти сведения почерпнуты из книги Коксетер, Мозер "Порождающие элементы и определяющие соотношения дискретных групп" Москва "Наука", 1980.

Перейдем в $\mathbb{C}[B_3]$ и "продеформируем" соотношение (1) следующим образом:

$$\boxed{(b_1 - u1)(b_1 - v1)(b_1 - w1) = 0} \qquad (2)$$

где $u, v, w \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ и попарно различны.

Фактор-алгебра $\mathbb{C}[B_3]/\langle(2)\rangle$ имеет размерность 24 и в ситуации общего положения её параметров она полупроста и изоморфна $\mathbb{C}[BT_3]$.

В её коммутативной подалгебре Юциса-Мэрфи, порождаемой J_2 и J_3, выполняются соотношения:

$$\boxed{(J_2 - u^2 1)(J_2 - v^2 1)(J_2 - w^2 1) = 0} \qquad (3a)$$

и 3 соотношения с участием J_3:

$$(J_2 - u^2 1)(J_2 - v^2 1)(J_3 - u^2v^2 1)(J_3 - w^4 1)(J_3 + u^3 w 1)(J_3 + v^3 w 1) = 0 \quad (3b)$$

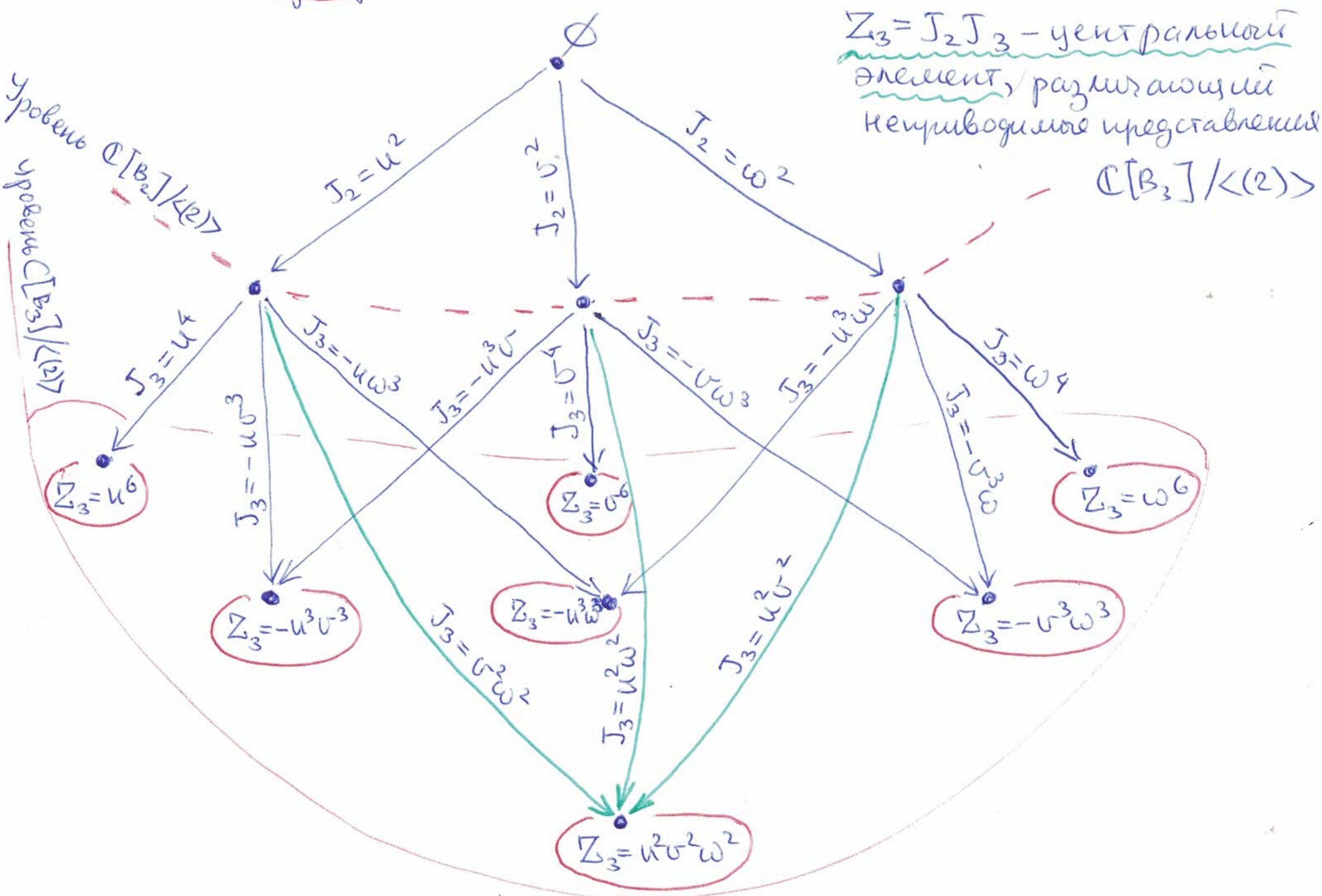
и ещё 2 соотношения, получаемые из (3в) циклической перестановкой $u \to v \to w \to u$.

(3a) элементарно следует из (2). Простого вывода (3в) мне неизвестно: получено прямым вычислением с разложением левой части (3в) по линейному базису в $\mathbb{C}[B_3]/\langle(2)\rangle$, либо проверкой (3в) в известных неприводимых представлениях алгебры.

Соотношение (3в) замечательно тем, что левая его часть имеет простые выражения для спектра J_3 в терминах u, v, w.

Из (3в) можно восстановить граф ветвления $\mathbb{C}[B_3]/\langle(2)\rangle$

Граф ветвления $\mathbb{C}[B_3]/\langle(2)\rangle$:



Вершины графа отвечают неприводимым представлениям алгебр $\mathbb{C}[B_i]/\langle(2)\rangle$, $i=2,3$, в конечных вершинах, отвечающих $\mathbb{C}[B_3]/\langle(2)\rangle$ указаны значения центрального элемента $Z_3 = J_2 \cdot J_3$. Пути из вершины $\varnothing$ в вершину заданного неприводимого представления маркируют базисные векторы представления. Значения J_2 и J_3 на базисном векторе указаны на ребрах путей.

Как и должно быть: $24 = 3^2 + 3\cdot 2^2 + 3\cdot 1^2$ — у алгебры $\mathbb{C}[B_3]/\langle(2)\rangle$ в её полупростом режиме есть одно 3-мерное, три 2-мерных и три 1-мерных неприводимых представления. 1-мерные и 2-мерные представления изоморфны тем, что мы уже изучали для алгебры Гекке H_3. Интересно 3-мерное представление.

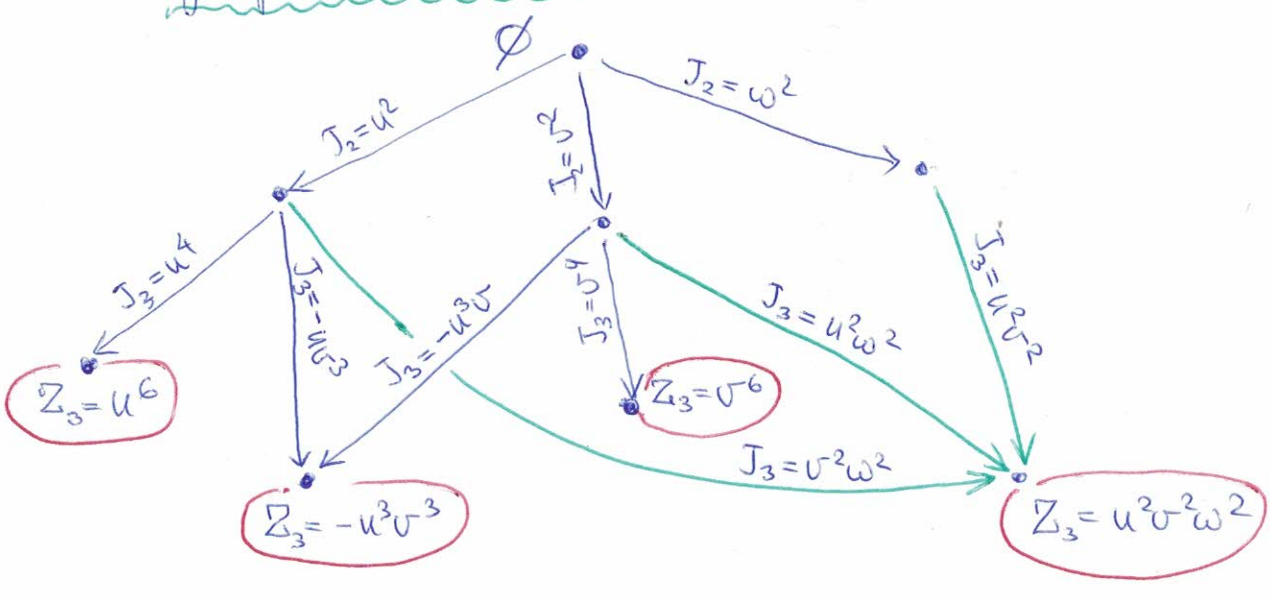
При рассмотрении фактор-алгебр $\mathbb{C}[B_n]/\langle(2)\rangle$ оказывается, что для $n=2,3,4,5$ они конечномерны, а начиная с $n=6$ становятся ∞-мерными.

Для получения конечномерных фактор-алгебр $\mathbb{C}[B_n]$ при $\forall n$ надо, помимо (2) наложить ещё условия на J_2 и J_3, усиливающие (3в). Хороший вариант усиления:

$$\boxed{(J_2-u^2 1)(J_2-v^2 1)(J_3-u^2v^2 1)=0} \quad (4)$$

позволяет сохранить интересное 3-мерное представление, т.к. он сохраняет путь в графе ветвления $\mathbb{C}[B_3]/\langle(2)\rangle$ из вершины $J_2=\omega^2$ в вершину $Z_3=u^2v^2\omega^2$ (с $J_3=u^2v^2$ на ребре), и "убивает" все другие пути из этой вершины.

Граф ветвления $\mathbb{C}[B_3]/\langle(2),(4)\rangle$



Алгебра $\mathbb{C}[B_3]/\langle(2),(4)\rangle$ имеет размерность

$$3^2+2^2+2\cdot 1^2 = 15 = 5!!$$

Подграф ее графа ветвления, содержащий только 1- и 2-мерные представления (без зелёных стрелок) — граф ветвления $H_3(q)$.

С увеличением n: $\dim \mathbb{C}[B_n]/\langle(2),(4)\rangle = (2n-1)!!$ — эта алгебра называется алгеброй Бирман-Мураками-Венцля:

$$\boxed{BMW_n := \mathbb{C}[B_n]/\langle(2),(4)\rangle}$$

Условие (4) в этой алгебре нарушает симметрию собственных значений u, v, ω генератора b_1 и выделяет проектор с $b_1 = \omega$ или $J_2 = \omega^2$. Проведем традиционное перемасштабирование и переобозначение собственных значений J_2:

$$\boxed{u \mapsto q\,, \quad v \mapsto -q^{-1}\,, \quad \omega \mapsto \mu}$$

и введем специальное обозначение для проектора с собственным значением $J_2 = \omega^2 = \mu^2$ (т.е. собств. значение $b_1 = \mu$):

$$\boxed{K_1 = -\frac{(b_1 - q1)(b_1 + q^{-1}1)}{\mu(q-q^{-1})}} \qquad (5)$$

K_1 — не нормирован; в силу (2) имеем:

$$\boxed{K_1 b_1 = b_1 K_1 = \mu K_1 \qquad K_1^2 = \eta K_1\,, \quad \eta := \frac{(q-\mu)(\frac{1}{q}+\mu)}{\mu(q-q^{-1})}} \quad (6a$$

Алгебры $BMW_n(q,\mu)$ удобно описывать в терминах
набора генераторов b_i, K_i, $i=1,2,\dots,n-1$, удовлетво-
ряющих, помимо артиновых соотношений на b_i в B_n
еще условием факторизации (2) (с $u=q$, $v=-q^{-1}$, $w=\mu$) и
следующим из него соотношением (6а), а также следую-
щим из (4) соотношениям

$$
\boxed{
\begin{aligned}
& b_i b_{i\pm1} K_i = K_{i\pm1} K_i \\
& K_i b_{i\pm1} b_i = K_i K_{i\pm1} \\
& K_i K_{i\pm1} K_i = K_i \\
& K_i b^{\epsilon}_{i\pm1} K_i = \mu^{-\epsilon} K_i \,, \quad \epsilon=\pm1 \\
& b'_i K_{i+1} b'_i = b'_{i+1} K_i b'_{i+1}\,, \text{ где } b'_i := b_i-(q-q^{-1})1
\end{aligned}
}
\qquad (6в)
$$

Вывод (6в) из (4) непрост, но (6в) удобней приспособлена для изучения алгебры.

Отметим очевидное: $BMW_n(q,\mu)/\langle K_1\rangle = H_n(q)$.

В пределе $q\to 1$ и при выборе $\mu=\pm q^{i}$ алгебры BMW_n переходят в известные алгебры Брауэра (R. Brauer), которые были введены для исследования неприводимых представлений ортогональной и симплектической групп Λ_n, также как симметрические группы S_n используются для изучения неприводимых представлений линейных групп Λ_n $GL(n)$ и $SL(n)$.

Генераторы K_i в алгебрах Брауэра и BMW_n имеют отношение к инвариантному скалярному произведению в ортогональной и симплектической группах.