<u>Классическая теория поля 2024</u>

Листок 2. Обобщенные функции, преобразования полей и инварианты

Срок сдачи: **15 марта 2024**

Математическое дополнение: свойства δ-функции Дирака

Напомним, что дельта-функцией Дирака, сосредоточенной в точке $x_0 \in \mathbb{R}$, называется линейный непрерывный функционал δ_{x_0} на пространстве Шварца основных функций $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, действующий по правилу:

$$\delta_{x_0}[f] = f(x_0).$$

С функционалом δ_{x_0} удобно формально обращаться как с ядерным функционалом, вводя фиктивное ядро – *дельта-функцию* $\delta(x - x_0)$, и записывая его действие в виде интеграла

$$\delta_{x_0}[f] \; = \; \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) f(x) dx = f(x_0).$$

1. Пусть $f(x)$ непрерывно дифференцируемая вещественная функция, имеющая конечное число *простых* нулей в точках $\{x_i\}_{1\le i\le N}$ вещественной оси. Найдите действие функционала с “ядром” $\delta(f(x))$ на функциях из пространства Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

2. Докажите справедливость следующего равенства:

$$\text{w}\!-\!\lim_{\varepsilon\to+0} \frac{\exp(-\frac{x^2}{\varepsilon})}{\sqrt{\pi\varepsilon}} = \delta(x).$$

Напомним, что предел здесь понимается в слабом смысле, т.е. как предел линейных функционалов, заданных на функциях из пространства Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

3. Докажите, что на пространстве основных функций $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ имеет место равенство обобщенных функций

$$\frac{d\theta(x - x_0)}{dx} = \delta(x - x_0),$$

где $\theta(x)$ — функция Хевисайда

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & x \ge 0 \\ 0 & x < 0. \end{cases}$$

4. Докажите равенство обобщенных функций на пространстве Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$:

$$\Delta\,\frac{1}{r} = -4\pi\delta^3(\vec{r}), \qquad \Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Здесь $\vec{r} = (x, y, z)$ — вектор евклидова пространства $\mathbb{R}^3$, $r = |\vec{r}\,|$, а $\delta^3(\vec{r}\,)$ — “трехмерная” дельта-функция:

$$\int_{\mathbb{R}^3} \delta^3(\vec{r}\,)\, f(\vec{r}\,)\, dxdydz = f(0), \qquad \forall\, f(\vec{r}\,) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3).$$

---

5. Лоренцевы инварианты электромагнитного поля. Рассмотрим тензор напряженности электромагнитного поля $F^{\mu\nu}$ и дуальный тензор

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}F_{\rho\lambda}.$$

Здесь $\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}$ — полностью антисимметрический тензор четвертого ранга, $\varepsilon^{0123} = 1$.

а) Выразите в терминах компонент векторов напряженности электрического и магнитного полей $\vec{E}$ и $\vec{H}$ лоренцевы инварианты $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ и $\tilde{F}_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$.

б) Выразите пфаффиан кососимметрической 4×4 матрицы $F^{\mu\nu}$:

$$\mathrm{Pf}F = \frac{1}{8}\,\varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda}F^{\mu\nu}F^{\rho\lambda} = \frac{1}{4}\,F^{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}, \quad (\det F = (\mathrm{Pf}F)^2)$$

в терминах компонент векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$.

6. В некоторой системе отсчета существуют однородные и постоянные электрическое и магнитное поля, вектора которых $\vec{E}$ и $\vec{H}$ не параллельны друг другу. Докажите, что *почти всегда* существует инерциальная система отсчета, в которой эти поля будут параллельны и найдите скорость этой системы отсчета относительно исходной системы. Единственно ли решение задачи? В каком случае задача не имеет решения?

Указание. Рассмотрите лоренцевский буст вдоль прямой перпендикулярной к плоскости, натянутой на вектора $\vec{E}$ и $\vec{H}$. Для поиска исключительного случая полезно воспользоваться лоренцевскими инвариантами, рассмотренными в задаче 5.

7. Найдите пространственную плотность заряда $\rho(\vec{r}\,)$ в $\mathbb{R}^3$, отвечающую сферически симметричному потенциалу следующего вида (потенциал Юкавы):

$$\phi(\vec{r}) = \frac{e^{-r/a}}{r}, \quad r = |\vec{r}|,$$

где a — постоянный положительный параметр. Потенциал ϕ – нулевая компонента 4-вектора $A^\mu = (\phi, 0, 0, 0)$. Чему равен полный заряд пространства с такой зарядовой плостностью?

8.* В пространстве Минковского M_3 найдите запаздывающую функцию Грина для уравнения движения свободного безмассового скалярного поля:

$$\Box\, G(x) = \delta^{(3)}(x), \qquad G(x) \equiv 0 \quad \text{при} \quad x^0 < 0.$$

Здесь $\Box = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu$, а $\eta^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1)$ — метрический тензор в пространстве M_3.