Геометрическое введение в алгебраическую геометрию. Весна 2024г

Решения этих задач будут обсуждаться на следующем занятии. Как обычно, внятно записанные (а лучше затеханные) решения нужно присылать на почту alggem23@gmail.com , до 24:00 ВТОРНИКА перед следующим занятием.

Задания с 15 занятия.

(1) Придумайте прямое доказательство того, что если уравнение плоской аффинной кривой имеет вид $F(x,y) = y^2 + \varphi_3(x:y) + \varphi_4(x:y) + \ldots$, где $\varphi_k(x:y)$ — однородная форма степени k, причем в форме φ_3 коэффициент при x^3 ненулевой, то пополнение локального кольца начала координат изоморфно пополнению локального кольца начала координат полукубической параболы $y^2 = x^3$. (Такая особая точка называется *острие* или *cusp*.) На занятии мы доказали это с использованием подготовительной теоремы Вейерштрасса.

(2) Завершите намеченное на занятии доказательство того, что любая квадратичная особенность плоской кривой формально изоморфна особенности кривой $y^2 = x^k$. (При $k = 2$ получается *простейшей двойная особая точка с разделенными касательными*, или *узел*, или *node* а при $k = 3$ — острие, или *cusp*.)

(3) Докажите, что если $X \subset \mathbb{P}^2$ — гладкая плоская проективная кривая степени d, то двойственная кривая $\check{X} \subset \check{\mathbb{P}}^2$ имеет степень $d(d-1)$.

(4) В условиях предыдущей задачи проверьте вычислением, что кривая $\check{\check{X}} \subset \mathbb{P}^2$, двойственная к двойственной кривой $\check{X} \subset \check{\mathbb{P}}^2$, совпадает с X, в случае, когда кривая X задается в некоторой аффинной карте как параметрическая кривая, т.е. $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$.

(5) Сравнение утверждений из предыдущих двух задач показывает, что если $X \subset \mathbb{P}^2$ — гладкая проективная кривая степени $d > 2$, то двойственная кривая $\check{X}$ должна иметь особенности. Из каких точек на гладкой кривой X могут получиться особые точки на $\check{X}$?