Билинейные формы

Обозначения. Мы рассматриваем конечномерное векторное пространство V над произвольным полем $\Bbbk$, оснащённое билинейной формой $\beta : V \times V \to \Bbbk$. Значение $\beta(u,w) \in \Bbbk$ на векторах $u, w \in V$ иногда удобно записывать в виде произведения[1] $u \cdot w$. Для двух наборов векторов $\boldsymbol{u} = (u_1, \dots, u_n)$ и $\boldsymbol{w} = (w_1, \dots, w_m)$, где $u_i, w_j \in V$, матрица $B_{\boldsymbol{uw}} = \boldsymbol{u}^t \cdot \boldsymbol{w} \in \mathrm{Mat}_{n\times m}(\Bbbk)$ с элементами $b_{ij} = v_i \cdot w_j = \beta(u_i, w_j)$ называется *матрицей Грама* этих наборов и формы β. Если наборы совпадают: $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{w}$, мы пишем просто $B_{\boldsymbol{u}}$ вместо $B_{\boldsymbol{uu}}$. В этом случае $\det B_{\boldsymbol{u}} \in \Bbbk$ называется *определителем Грама* формы β и набора векторов $\boldsymbol{u}$. Форма называется *невырожденной*, если $\det B_{\boldsymbol{e}} \neq 0$ для какого-нибудь базиса $\boldsymbol{e}$ в V.

ГС12◇1. Пусть наборы векторов $\boldsymbol{u} = (u_1, \dots, u_n)$ и $\boldsymbol{w} = (w_1, \dots, w_m)$ линейно выражаются через наборы векторов $\boldsymbol{r} = (r_1, \dots, r_k)$ и $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, \dots, s_\ell)$ по формулам $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{r}\, C_{\boldsymbol{ru}}$ и $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{s}\, C_{\boldsymbol{sw}}$, где $C_{\boldsymbol{ru}} \in \mathrm{Mat}_{k\times n}(\Bbbk)$, $C_{\boldsymbol{sw}} \in \mathrm{Mat}_{\ell\times m}(\Bbbk)$. Выразите матрицу Грама $B_{\boldsymbol{uw}}$ через матрицу Грама $B_{\boldsymbol{rs}}$ и матрицы $C_{\boldsymbol{ru}}$, $C_{\boldsymbol{sw}}$.

ГС12◇2. Покажите, что определитель Грама линейно зависимого набора векторов нулевой.

ГС12◇3. Зафиксируем в пространствах V и V^* двойственные базисы $\boldsymbol{e} = (e_1, \dots, e_n)$ и $\boldsymbol{e}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$. Сопоставим билинейной форме $\beta : V \times V \to \Bbbk$ линейные операторы *левой* и *правой корреляции* ${}^\wedge\beta, \beta^\wedge : V \to V^*$, переводящие вектор $v \in V$ в линейные функции

$$ {}^\wedge\beta(v) : V \to \Bbbk, \quad u \mapsto \beta(v,u), \quad \text{и} \quad \beta^\wedge(v) : V \to \Bbbk, \quad u \mapsto \beta(u,v). $$

Выразите матрицы этих операторов в базисах $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{e}^*$ через матрицу Грама $B_{\boldsymbol{e}}$.

ГС12◇4. Для любой билинейной формы $\beta : V\times V \to \Bbbk$ покажите, что **а)** $\dim\ker{}^\wedge\beta = \dim\ker\beta^\wedge$ **б)** матрицы Грама всех базисов пространства V имеют одинаковый ранг.

ГС12◇5. Приведите пример формы, у которой $\ker{}^\wedge\beta \neq \ker\beta^\wedge$.

ГС12◇6. Покажите, что у любого базиса $\boldsymbol{e} = (e_1, \dots, e_n)$ в пространстве V с невырожденной билинейной формой β имеются левый и правый *двойственные базисы* ${}^\vee\boldsymbol{e} = ({}^\vee e_1, \dots, {}^\vee e_n)$ и $\boldsymbol{e}^\vee = (e_1^\vee, \dots, e_n^\vee)$, однозначно определяемые тем, что $\beta({}^\vee e_i, e_j) = \beta(e_i, e_j^\vee) = \delta_{ij}$, и выразите матрицы $C_{\boldsymbol{e}\,{}^\vee\boldsymbol{e}}$ и $C_{\boldsymbol{e}\boldsymbol{e}^\vee}$, по столбцам которых стоят координаты векторов ${}^\vee e_j$ и $e_j^\vee$ в базисе $\boldsymbol{e}$, через матрицу Грама $B_{\boldsymbol{e}}$. Убедитесь, что любой вектор $v \in V$ выражается через базис $\boldsymbol{e}$ по формулам $v = \sum_i \beta({}^\vee e_i, v)\, e_i = \sum_j \beta(v, e_j^\vee)\, e_j$.

ГС12◇7. Вырождено ли ограничение билинейной формы β на $\mathbb{Q}^4$ с матрицей Грама

$$ \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -5 \\ -1 & 3 & -8 & 8 \\ 2 & -5 & 8 & -10 \end{pmatrix} $$

на пространство U решений системы $\begin{cases} 2x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$? Если нет, то найдите проекцию вектора $v = (6, -11, -9, 9)$ на U вдоль $U^\perp = \{w \in \mathbb{Q}^4 \mid \forall\, u \in U \ \beta(u,w) = 0\}$.

ГС12◇8. Покажите, что при $\operatorname{char}\Bbbk \neq 2$ каждая билинейная форма однозначно представляется в виде суммы симметричной и кососимметричной билинейных форм. Приведите пример невырожденной билинейной формы, у которой оба слагаемых в этой сумме вырождены. Найдите размерности векторных пространств симметричных и кососимметричных билинейных форм на n-мерном пространстве V.

ГС12◇9. Пусть для любых двух векторов $u, w \in V$ равенства $\beta(u,w) = 0$ и $\beta(w,u) = 0$ равносильны друг другу. Покажите, что форма β симметрична или кососимметрична.

[1] Принимающего значения в поле $\Bbbk$ (т. е. *скалярного*) и, вообще говоря, некоммутативного.

ГС12⋄10. Рассмотрим на пространстве $V = \mathbb{Q}[x]_{\leqslant n}$ многочленов степени $\leqslant n$ с рациональными коэффициентами функцию $\beta(f,g)$, значение которой на многочленах $f, g \in V$ равно свободному члену многочлена[2] $f(d/dx)\,g$. Является ли она билинейной формой? Если да, то напишите её матрицу Грама в стандартном базисе из мономов и выясните, вырождена ли она? Симметрична ли?

ГС12⋄11. Существует ли на нечётномерном пространстве невырожденная кососимметричная форма? Покажите, что ранг любой кососимметричной формы чётен.

ГС12⋄12 (кососимметричность в характеристике 2). Покажите, что над полем $\Bbbk$ любой характеристики равенство $\beta(v,v) = 0$ для всех $v \in V$ влечёт равенство $\beta(u,w) = -\beta(w,u)$ для всех $u, w \in V$, а обратная импликация имеет место только при $\operatorname{char}\Bbbk \neq 2$.

[2] В первый многочлен вместо x подставили оператор дифференцирования $\frac{d}{dx}$ и применили полученный дифференциальный оператор ко второму многочлену.