Линейные отображения евклидовых пространств

В этом листке V по умолчанию обозначает n-мерное евклидово векторное пространство $\mathbb{R}^n$.

ГЛ8◇1. Пусть $V = U \oplus W$, где сумма не предполагается ортогональной, и $\pi : V \to V$ — проекция на W вдоль U. Верно ли, что $V = U^{\perp} \oplus W^{\perp}$? Опишите ядро, образ и действие евклидово сопряжённого к π оператора $\pi^{\times} : V \to V$.

ГЛ8◇2. Пусть $V = \mathbb{R}^3$. Введём на пространстве $S^m V^*$ однородных многочленов степени m от стандартных координат (x, y, z) на V евклидову структуру, в которой все мономы $x^{\alpha} y^{\beta} z^{\gamma}$ ортогональны друг другу и имеют скалярные квадраты $\alpha!\beta!\gamma!$.

а) Опишите линейный оператор $\Delta^{\times} : S^{m-2}V^* \to S^m V^*$, евклидово сопряжённый к *оператору Лапласа* $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} : S^m V^* \to S^{m-2} V^*$.

б*) Покажите, что $S^m V^* = H_m \oplus g\, H_{m-2} \oplus g^2\, H_{m-4} \oplus \cdots$, где $H_m = \{f \in S^m V^* \mid \Delta f = 0\}$ обозначает подпространство *гармонических многочленов*, а $g \overset{\text{def}}{=} x^2 + y^2 + z^2 \in S^2 V^*$ — квадрат евклидовой длины на V.

ГЛ8◇3. Пусть $f : V \to V$ самосопряжённый линейный оператор с собственными значениями $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_n$. Для подпространства $U \subset V$ с ортонормальным базисом $u_1, u_2, \ldots, u_r$ положим $R_U(f) \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{r} (u_i, f u_i)$.

а) Зависит ли $R_U(f)$ от выбора ортонормального базиса в U?

б) Найдите $\max_U R_U(A)$ по всем r-мерным подпространствам $U \subset V$ в предположении, что все собственные числа оператора f попарно различны.

ГЛ8◇4. В условиях предыдущей задачи обозначим через $m_U(f)$ и $M_U(f)$ минимальное и максимальное значения квадратичной формы $q_f(u) \overset{\text{def}}{=} (u, fu)$ на единичной сфере $S^{r-1} \subset U$. Докажите, что

а) **(принцип минимакса)** $\max_U m_U(f) = \alpha_r = \min_W M_W(f)$, где максимум и минимум берутся, соответственно, по всем r-мерным подпространствам $U \subset V$ и всем $(n+1-r)$-мерным подпространствам $W \subset V$

б) для любой гиперплоскости $H \subset V$ существует единственный такой самосопряжённый оператор $h : H \to H$, что $q_f(u) = (u, hu)$ для всех $u \in H$

в*) собственные числа $\beta_1 \geqslant \beta_2 \geqslant \ldots \geqslant \beta_{n-1}$ оператора $h : H \to H$ из предыдущего пункта удовлетворяют неравенствам $\alpha_1 \geqslant \beta_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \beta_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_{n-1} \geqslant \beta_{n-1} \geqslant \alpha_n$.

ГЛ8◇5 (нормальные операторы). Покажите, что следующие свойства линейного оператора $f : V \to V$ на евклидовом пространстве V эквивалентны:

а) $ff^{\times} = f^{\times}f$

б) $\forall\, v \in V\ |f(v)| = |f^{\times}(v)|$

в) компоненты (единственного) разложения $f = f_+ + f_-$ в сумму самосопряжённого и антисамосопряжённого операторов перестановочны.

ГЛ8◇6. Пусть линейный оператор $f : V \to V$ нормален. Докажите для каждого собственного подпространства $V_{\lambda} \subset V$ оператора f включения $f^{\times}(V_{\lambda}) \subset V_{\lambda}$ и $f(V_{\lambda}^{\perp}) \subset V_{\lambda}^{\perp}$.

ГЛ8◇7. Покажите, что невырожденный оператор $f \in \mathrm{GL}(V)$ нормален если и только если ортогональная компонента $g \in \mathrm{O}(V)$ и положительная самосопряжённая компонента h его полярного разложения $f = gh$ перестановочны.